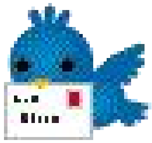
第5章 机械振动

序：

1. 振动是自然界中物体存在的一种形式。
2. 振动是具有周期性特征的运动。
3. 振动包括机械振动、电磁振动等。

机械振动：物体在某一位置附近来回往复的运动。

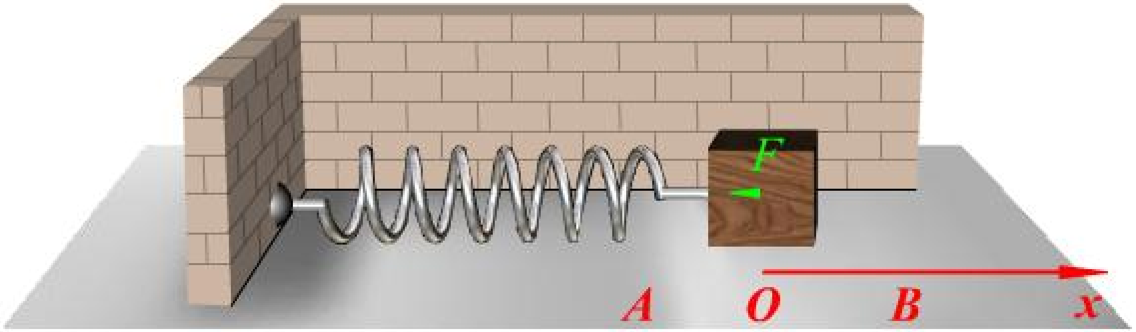
平衡位置

4. 一切振动中最简单、最基本的振动是简谐运动。

§5.1　简谐运动

一、简谐运动

理想模型：弹簧振子



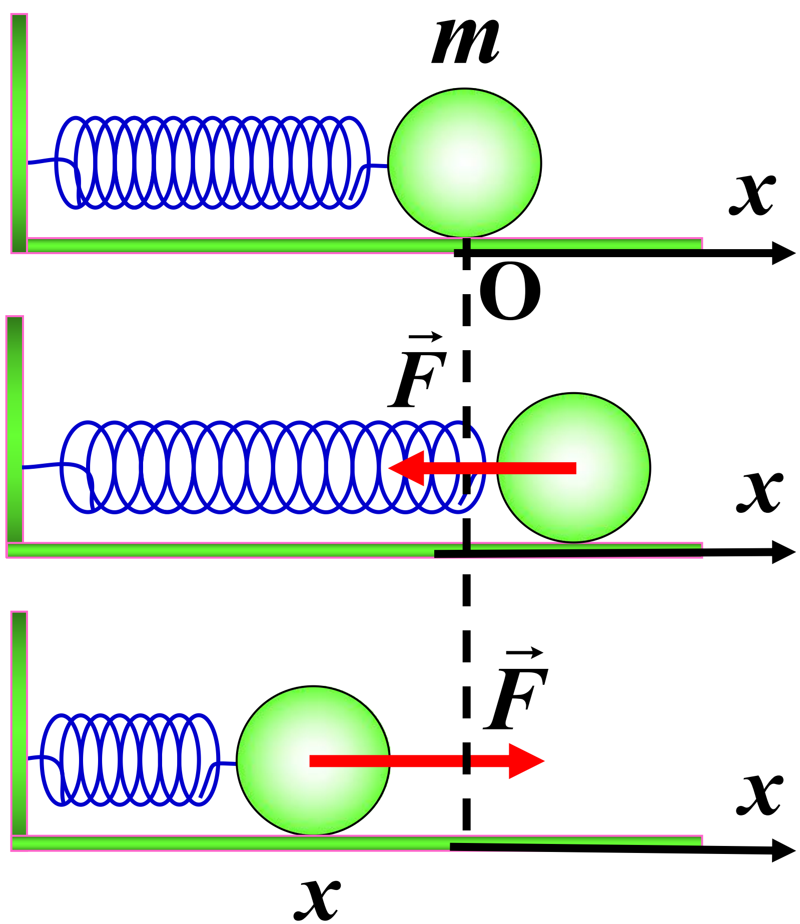
弹簧质量可忽略

受力：$F=-kx$

$$a=\frac{F}{m}=-\frac{k}{m}x$$

令 $\frac{k}{m}=\omega^2$

$$\therefore \quad a=-\omega^2 x=\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$



简谐运动微分方程：$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0$

简谐运动方程：$x=A\cos(\omega t+\varphi)$

简谐运动：描述系统状态的物理量随时间变化规律满足余弦函数形式的运动。

判定（1）物体所受的力恒与位移成正比且反向

（2）物体的加速度恒与位移成正比且反向

（3）描述物体运动状态的变量x满足：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0 \text{ 或 } x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

二、简谐运动的速度和加速度

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

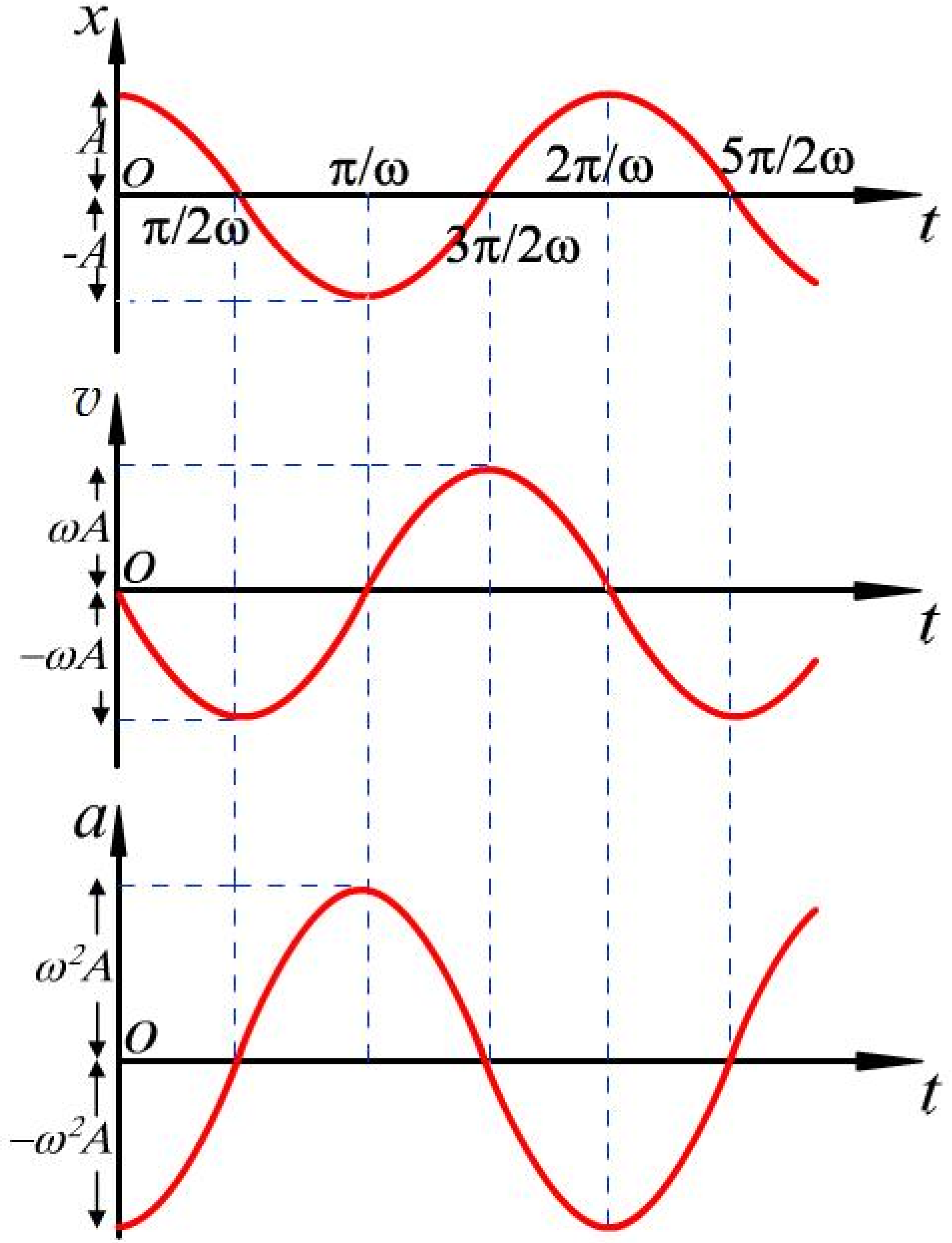
$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$v_{\mathrm{m}} = A\omega$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

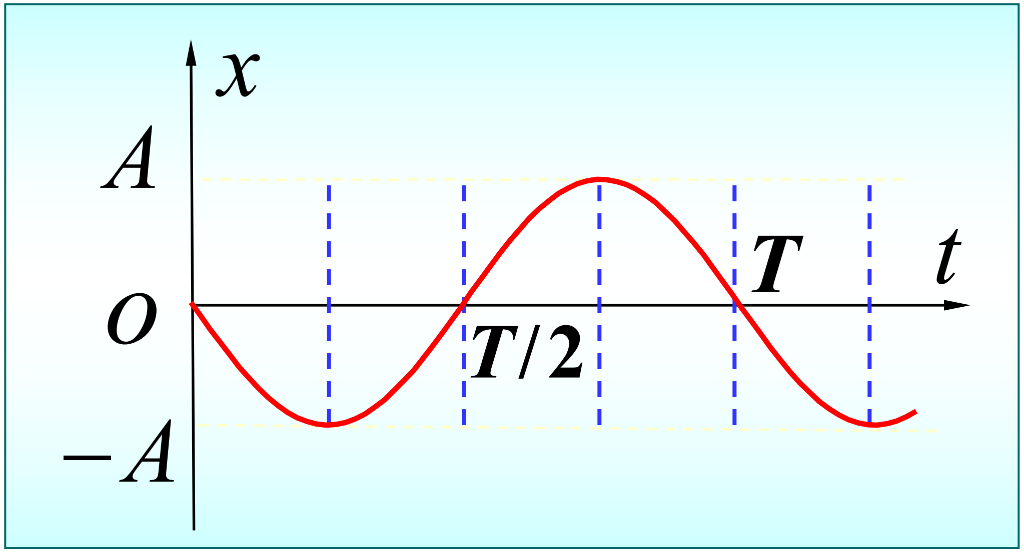
$$a_{\mathrm{m}} = A\omega^2$$

简谐运动图解($\varphi=0$)



三、描述简谐运动的特征量

1. 振幅 A



物体偏离平衡位置的最大距离

描述振动强弱的物理量

2. 周期T与频率ν 描述振动快慢

周期：$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

频率：$\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$

角频率：$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$

弹簧振子：$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

说明

（1）T、ν、ω由系统本身决定，称为固有周期、固有频率、固有角频率。

（2）谐振动表达式：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$$
$$= A\cos(2\pi\nu t + \varphi)$$

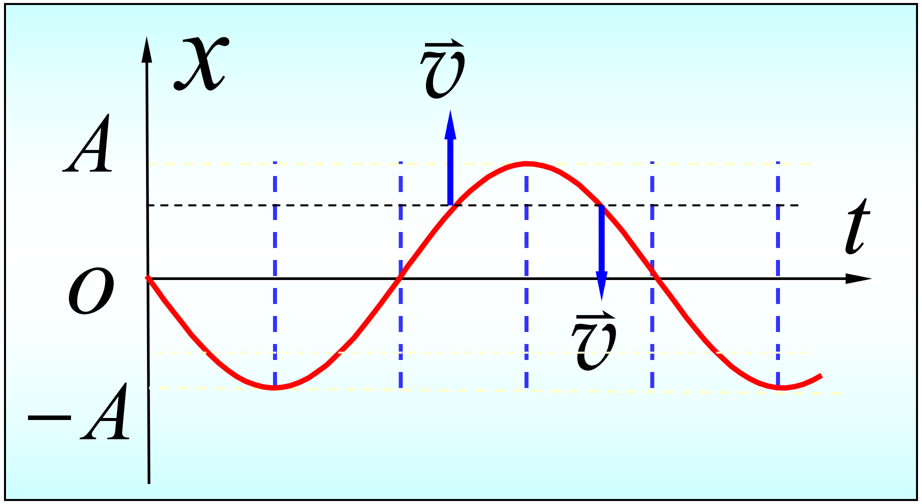
3.相位Φ　　$\Phi = \omega t + \varphi$

初相φ:　　**t =0时的相位**

（1）决定物体振动状态的物理量：

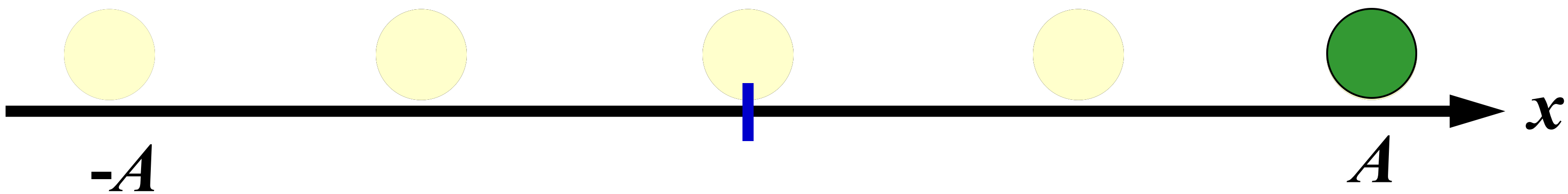
$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) \\ v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ v_0 = -A\omega\sin\varphi \end{cases}$$

$$(\omega t + \varphi) \Longleftrightarrow x, v \qquad \varphi \Longleftrightarrow x_0, v_0$$



$$x = A\cos\Phi$$
$$v = -A\omega\sin\Phi$$

$x = -A/2$	$x = 0$	$x = A/2$
$v > 0$	$v = v_m$	$v > 0$
$\Phi = 4\pi/3$	$\Phi = 3\pi/2$	$\Phi = 5\pi/3$



$x = -A$	$x = -A/2$	$x = 0$	$x = A/2$	$x = A$
$v = 0$	$v < 0$	$v = -v_m$	$v < 0$	$v = 0$
$\Phi = \pi$	$\Phi = 2\pi/3$	$\Phi = \pi/2$	$\Phi = \pi/3$	$\Phi = 0$

（2）一个周期中，相位与振动状态一一对应。

（3）其它周期的振动状态只是第一个周期的重复。

（4）φ 与计时零点选择有关。

4. 参数的确定

（1）ω

$$\begin{cases} F \rightarrow k \rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ \text{列方程} \rightarrow \text{与标准形式比较} \rightarrow \omega \end{cases}$$

（2）A和φ由初始条件决定

$$t = 0 \quad \begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ v_0 = -A\omega\sin\varphi \end{cases}$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \qquad \varphi: \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x_0}{A} \\ \sin\varphi = -\dfrac{v_0}{A\omega} \end{cases} \text{共同决定}$$

例：$x_0 = 0$, $v_0 = 1\,\mathrm{m/s}$，$\omega = 10\,\mathrm{rad/s}$。

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = 0.1\,\mathrm{m}$$

$$\cos\varphi = \frac{x_0}{A} = 0 \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$\sin\varphi = -\frac{v_0}{A\omega} < 0$$ 只能取：$\varphi = -\frac{\pi}{2}$

例：作谐振动的小球，$v_m = 3\times10^{-2}$ m/s^{-1}，A=2×10^{-2}m。$t = 0$ 时刻，小球位于最大位移的一半处且向平衡位置运动。

求：(1)振动方程；(2) t =π/3秒时，物体的x, v, a。

解：(1) $v_m = A\omega \quad \therefore \ \omega = 1.5\ \mathrm{s}^{-1}$

$$x_0 = \frac{A}{2} \qquad \cos\varphi = \frac{x_0}{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{3}$$

$\because\ v < 0$ 只能取：$\varphi = \dfrac{\pi}{3}$

$$x = 2\times10^{-2}\cos(1.5t + \frac{\pi}{3})\ \ \mathrm{m}$$

(2) $x = 2\times10^{-2}\cos(1.5t + \frac{3\pi}{2})\ \text{m}$

$$v = -3\times10^{-2}\sin(1.5t + \frac{3\pi}{2})\ \text{m/s}$$

$$a = -4.5\times10^{-2}\cos(1.5t + \frac{3\pi}{2})\ \text{m/s}^2$$

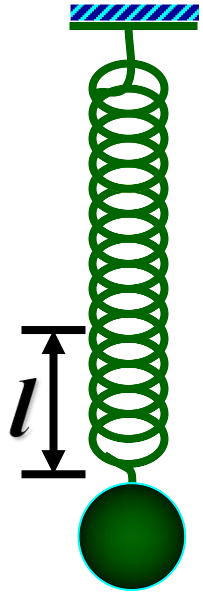
$t = \pi/3$ 秒时：

$$x = 2\times10^{-2}\ \text{m}$$

$$v = 0$$

$$a = -4.5\times10^{-2}\ \text{m/s}^2$$

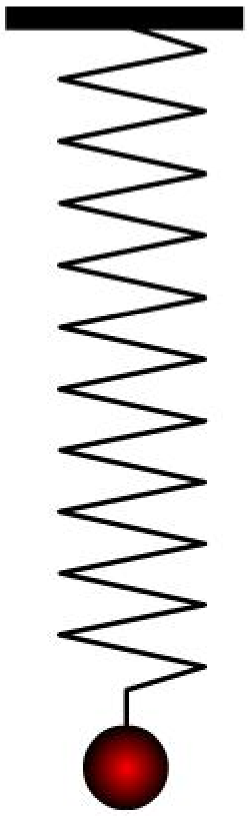
例5.1：一个轻弹簧竖直悬挂，下端挂一质量m=1.0kg 的物体，平衡时可使弹簧伸长$l=9.8\times10^{-2}$m，今使物体在平衡位置获得 $v_0=1\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$而方向向下的初速度，此后物体将在竖直方向运动。



（1）试证物体作简谐运动，并写出运动方程；

（2）求速度和加速度及其最大值；

（3）求最大恢复力。



解:（1）试证物体作简谐振动

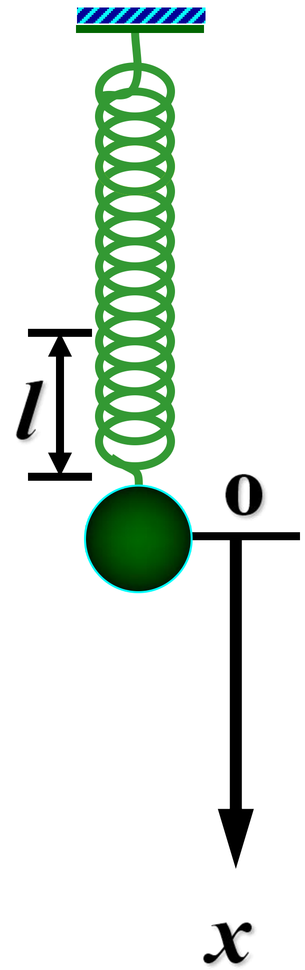
$$mg - kl = 0$$

$$F = mg - k(l + x)$$

$$F = -kx$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$$



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}} = 10\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$x_0 = A\cos\varphi = 0, \qquad v_0 = -A\omega\sin\varphi = 1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = 0.1\,\mathrm{m} \qquad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$x = 0.1\cos(10t - \frac{\pi}{2})\ (\mathrm{SI})$$

（2）求速度、加速度及其最大值

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sin(10t - \frac{\pi}{2})\ (\mathrm{SI})$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sin(10t - \frac{\pi}{2})\ (\mathrm{SI})$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -10\cos(10t - \frac{\pi}{2})\ (\mathrm{SI})$$

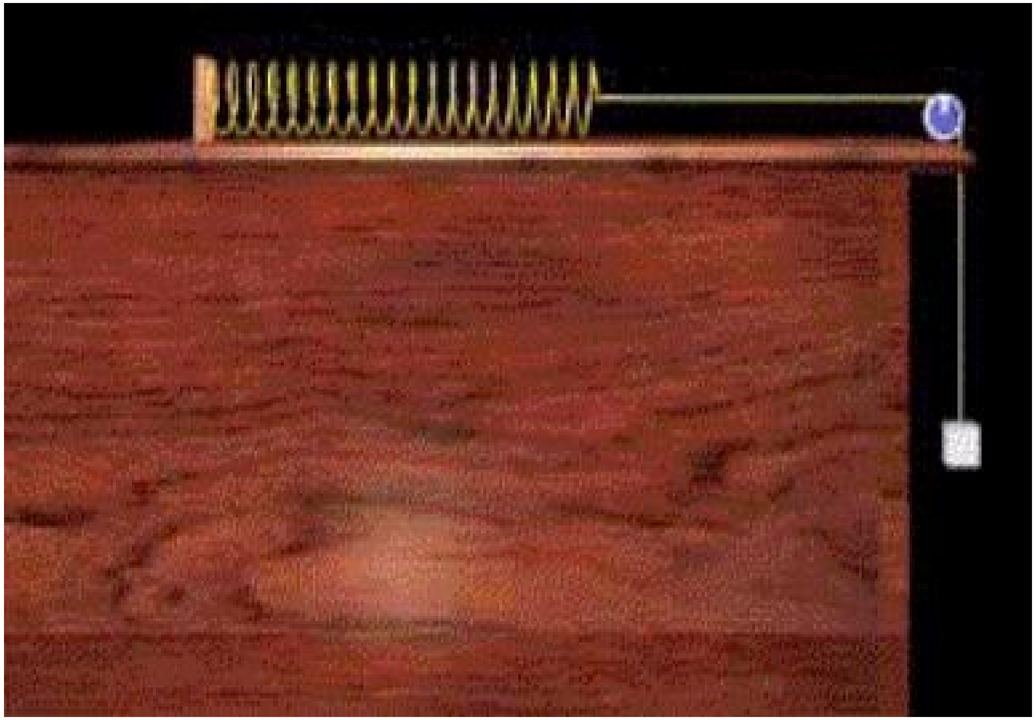
$$v_{\mathrm{m}} = \omega A = 1\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

$$a_{\mathrm{m}} = \omega^2 A = 10\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

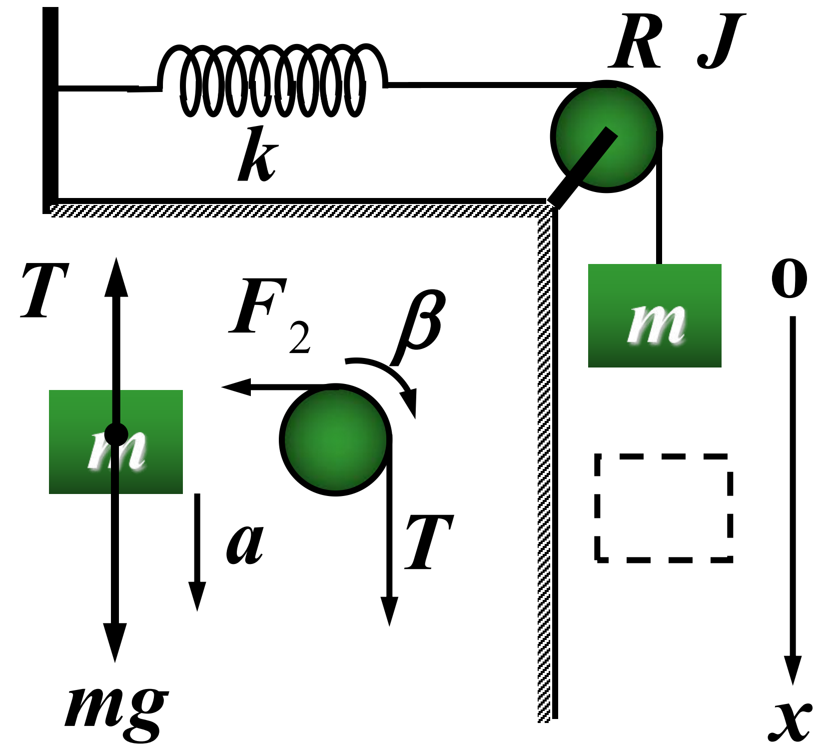
（3）求最大恢复力

$$F_{\mathrm{m}} = kA = m\omega^2 A = 10\ \mathrm{N}$$

例：如图所示，振动系统由一倔强系数为 k 的轻弹簧、一半径为R、转动惯量为J的定滑轮和一质量为m 的物体所组成。使物体略偏离平衡位置后放手，任其振动，试证物体作简谐振动，并求其周期T。



解： 取位移轴ox，m在平衡位置时，设弹簧伸长量为Δl，则



$$mg - k\Delta l = 0$$

当m有位移x时

$$mg - T = ma$$

$$\left[T - k(\Delta l + x)\right]R = J\frac{a}{R}$$

联立得 $$-kx=\left(m+\frac{J}{R^2}\right)a$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m+(J/R^2)}x=0$$ 物体作简谐振动！

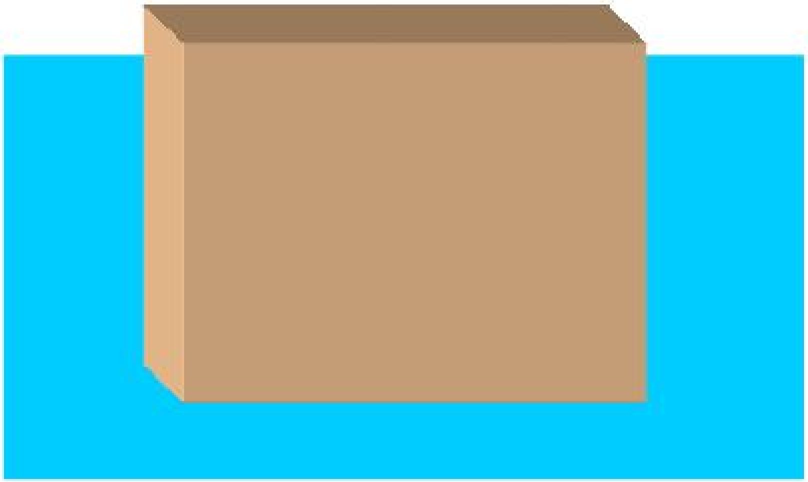
$$\omega^2=\frac{k}{m+(J/R^2)}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m+(J/R^2)}{k}}$$

例：边长L=25cm，密度$\rho = 0.8g/cm^3$的方木块，浮在水槽的水面上， 把木块完全压入水中，然后放手，不计水对木块的阻力。

求：（1）是否为简谐振动？

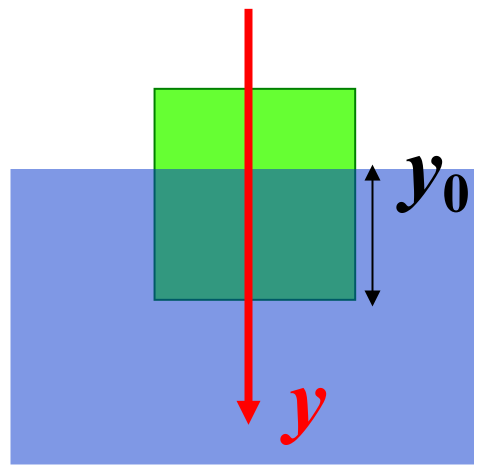
（2）圆频率，周期，振动方程。

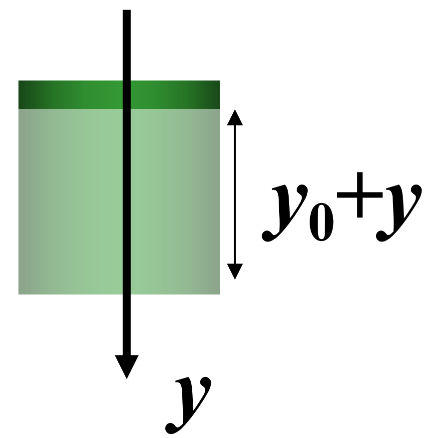


解：(1)　$F = mg - f$

平衡位置：

$$\rho L^3 g = \rho_{水} L^2 y_0 g$$





任一位置：

$$F = \rho L^3 g - \rho_{水} L^2 (y_0 + y) g$$

$$= -\rho_{水} L^2 g y = -ky$$

简谐振动！

(2) $k=\rho_{水}L^2g$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{\rho_{水}L^2g}{\rho L^3}}=7\ \mathrm{s}^{-1}$$

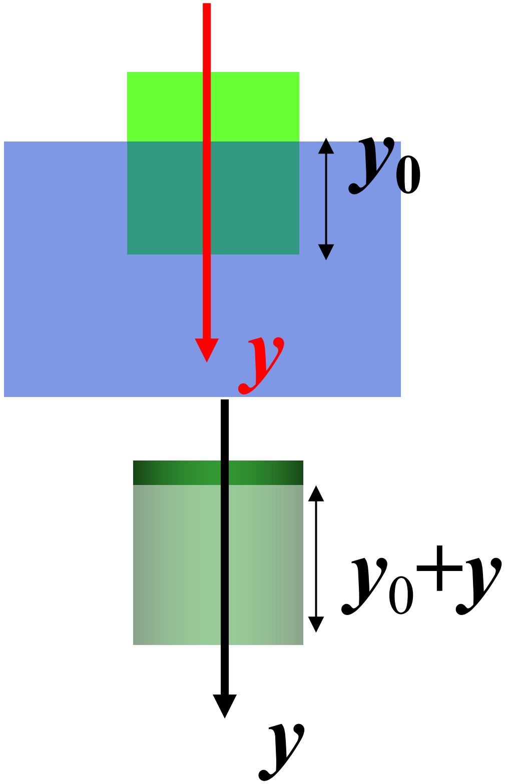
$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2}{7}\pi\ \ \mathrm{s}$$

$$A=L-y_0=0.05\ \mathrm{m}$$

$$y_0=\frac{\rho}{\rho_{水}}L=0.2\ \mathrm{m}$$

初始位置：$y=A\quad\therefore\ \varphi_0=0$

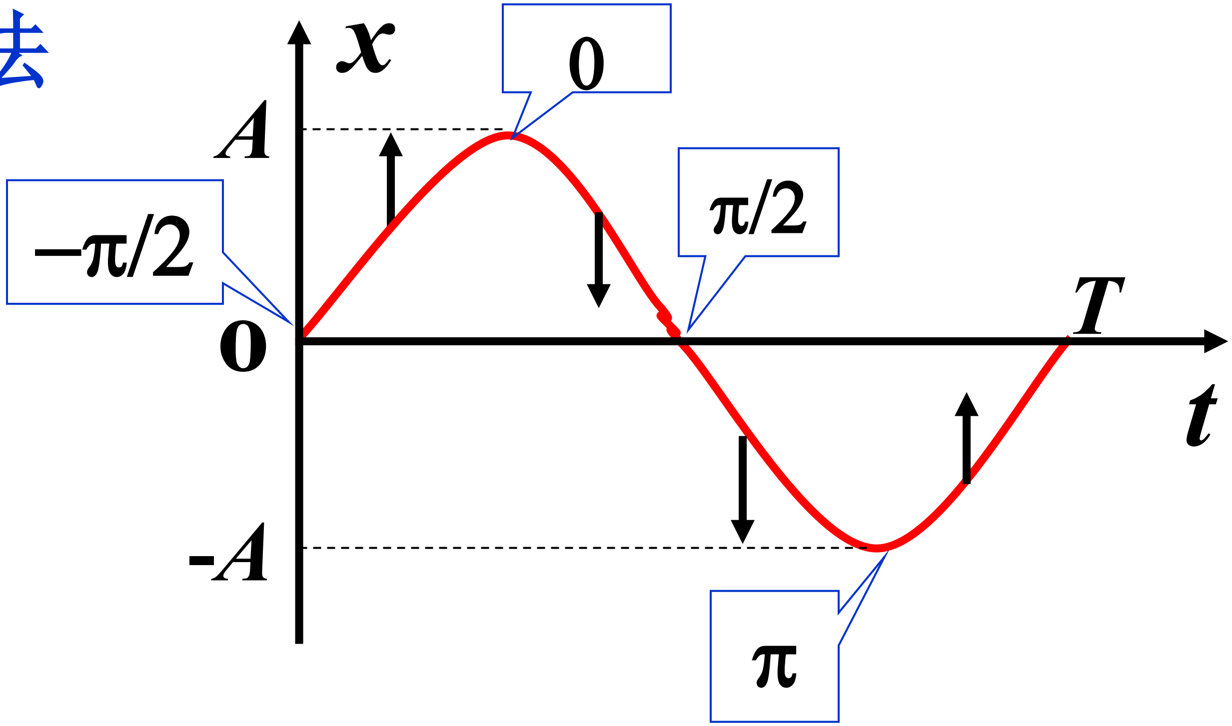
$\therefore\quad x=5\cos 7t\ \ \mathrm{cm}$



§ 5.2 简谐运动的旋转矢量表示法

1. 公式法 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

2. 图象法



从图象中可得到哪些信息？

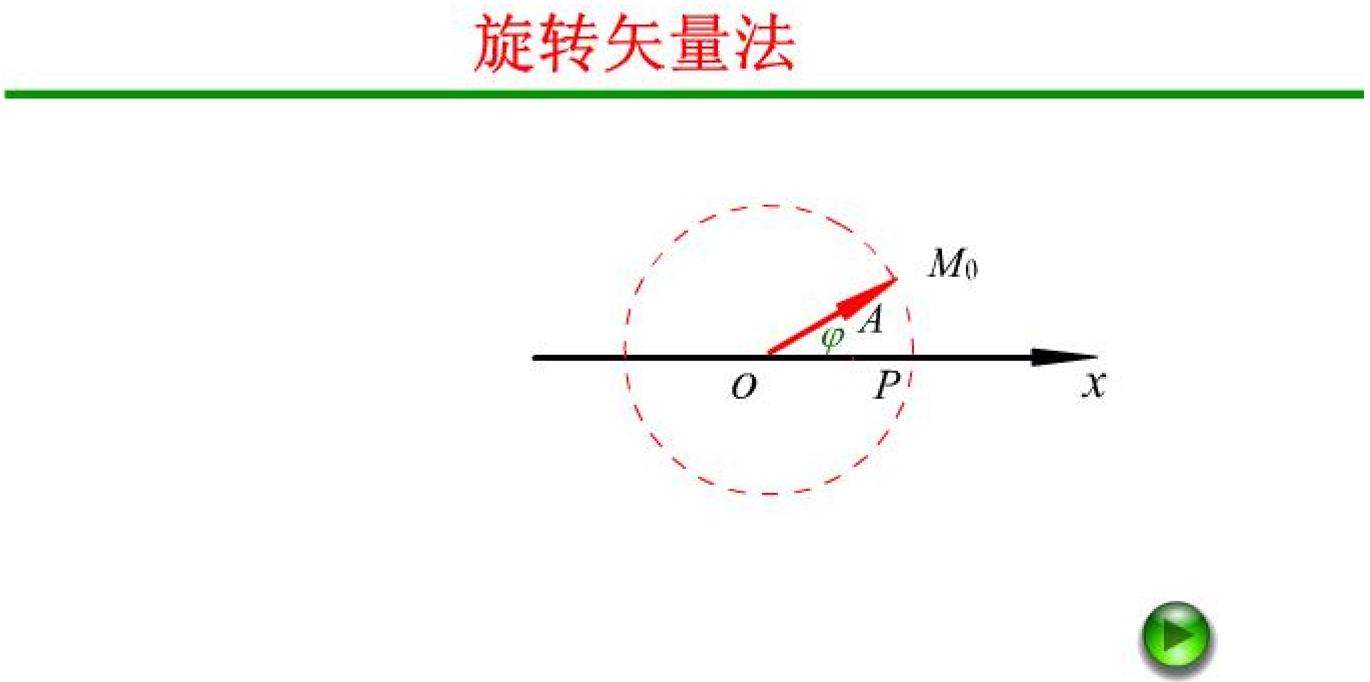
（1）振幅A； （2）周期T；

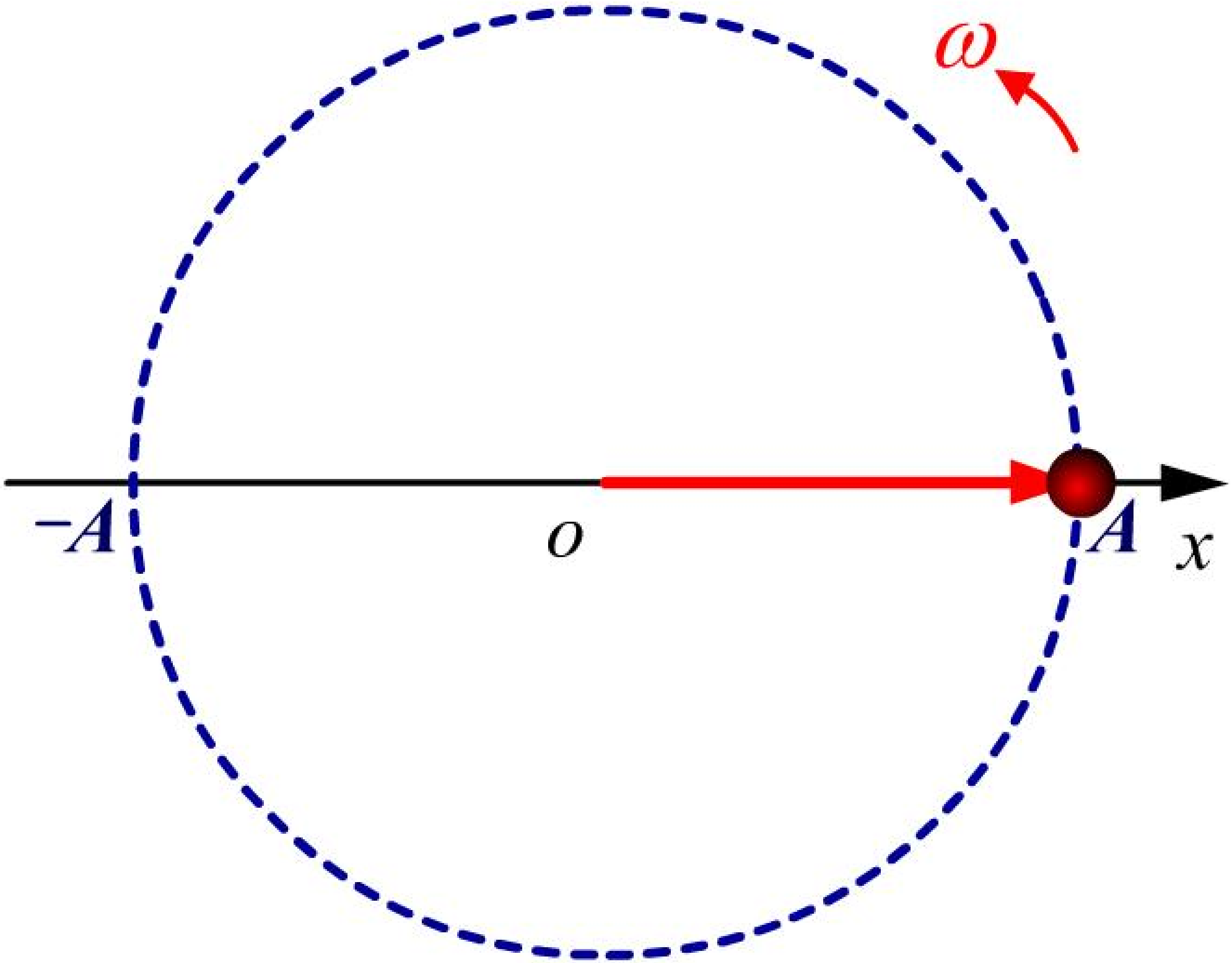
（3）x （4）相位Φ

（5）任一时刻振子的振动方向

3. 旋转矢量法

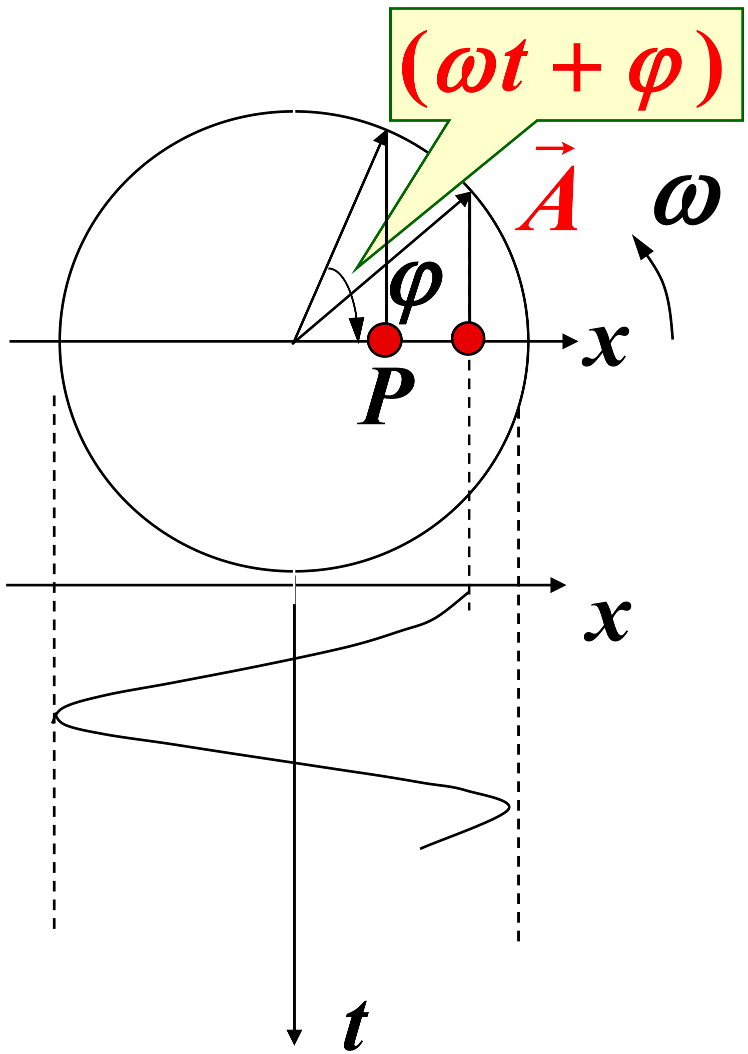
旋转矢量 $\vec{A}$：大小为A，以 ω 旋转





ω
−A
o
A
x

一、位移



$\vec{A}$ 在x轴上的投影为：

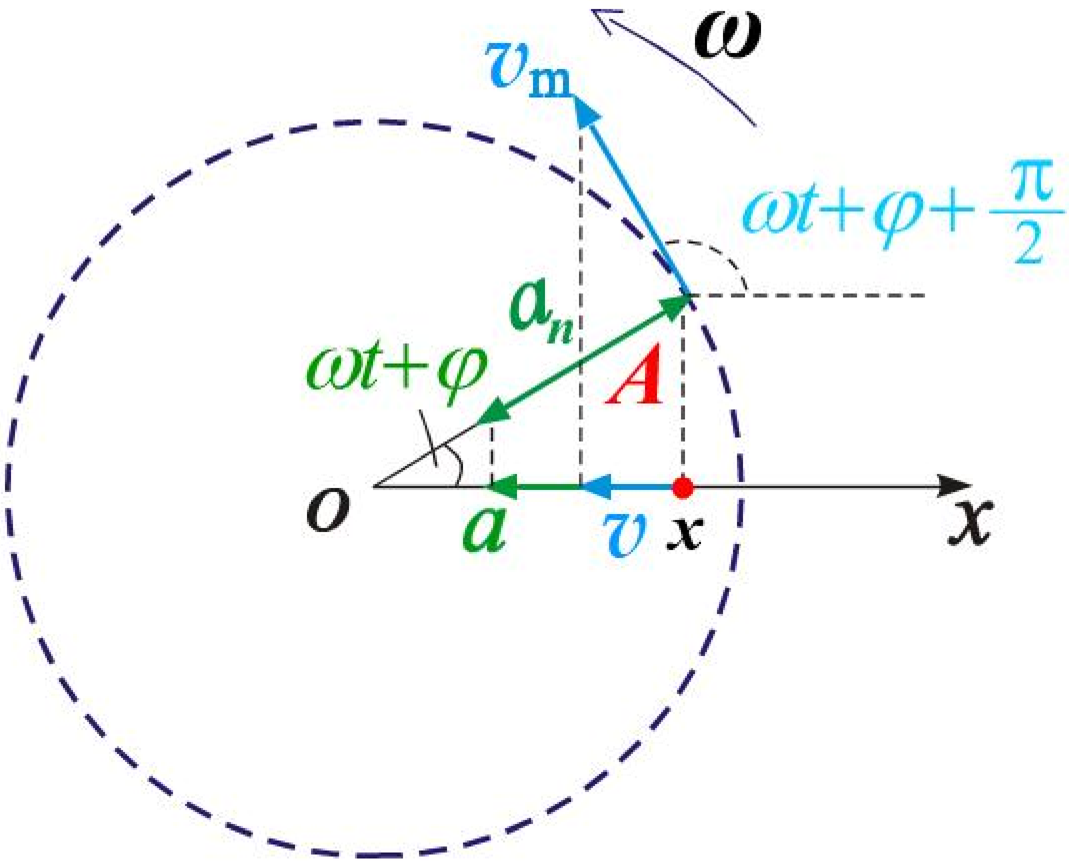
$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

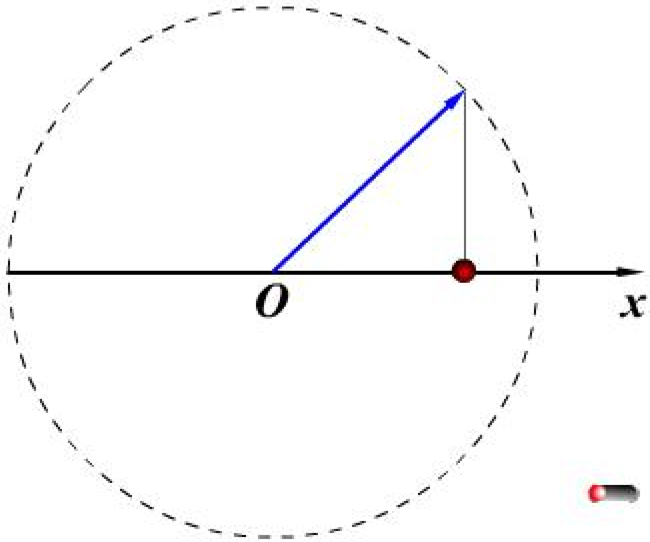
投影点P在x轴上作谐振动

旋转矢量	谐振动
大小A	振幅A
角速度ω	圆频率ω
与x轴夹角 $t=0$	相位Φ 初相φ
在x轴投影	位移x

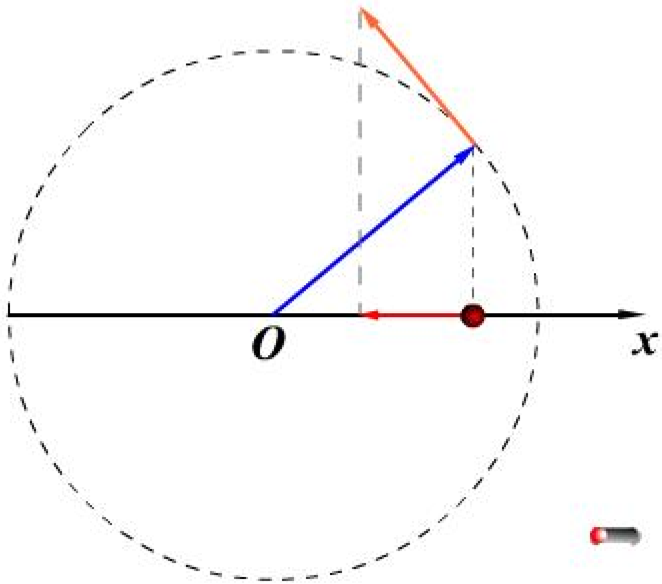

x
t
o
A
0

二、速度　加速度





简谐振动物体的位置坐标

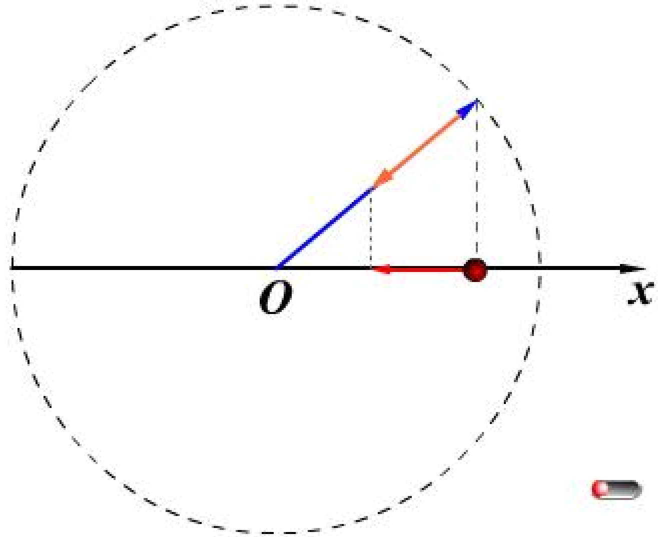


简谐振动物体的速度

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = \omega A\cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

$$a = \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi + \pi)$$



简谐振动物体的加速度

三、相位关系

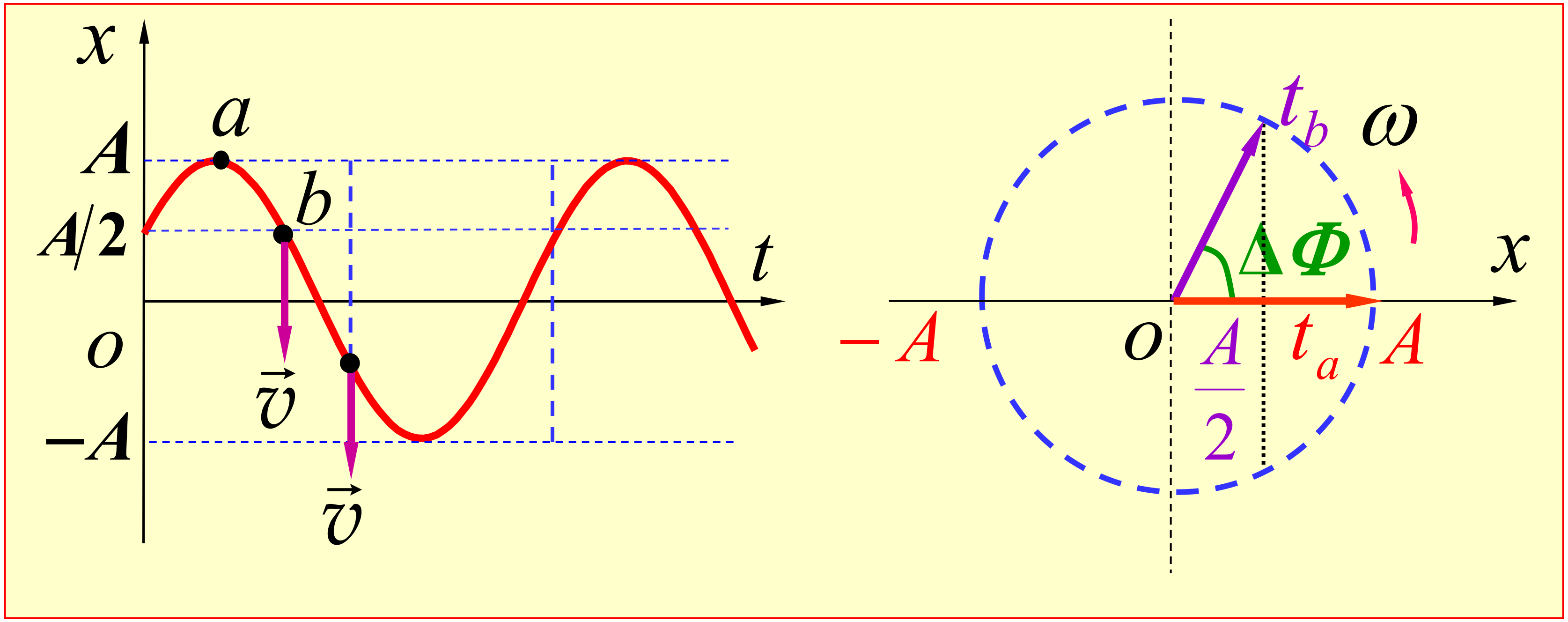
➢相位差：两个相位之差

（1）对同一简谐运动，相位差可以给出两运动状态间变化所需的时间。

$$x_1 = A\cos(\omega t_1 + \varphi) \qquad x_2 = A\cos(\omega t_2 + \varphi)$$

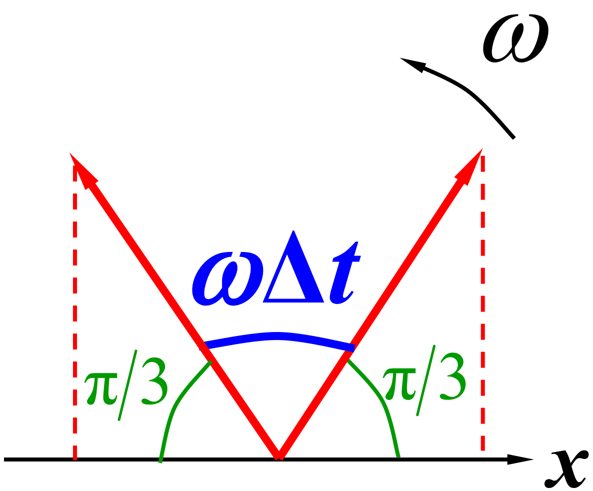
$$\Delta\Phi = (\omega t_2 + \varphi) - (\omega t_1 + \varphi) = \omega(t_2 - t_1)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta\Phi}{\omega}$$



$$\Delta\Phi = \frac{\pi}{3} = \omega\Delta t$$

$$\Delta t = \frac{\pi/3}{2\pi}T = \frac{1}{6}T$$



（2）对于两个同频率的简谐运动，相位差表示它们间步调上的差异（解决振动合成问题）。

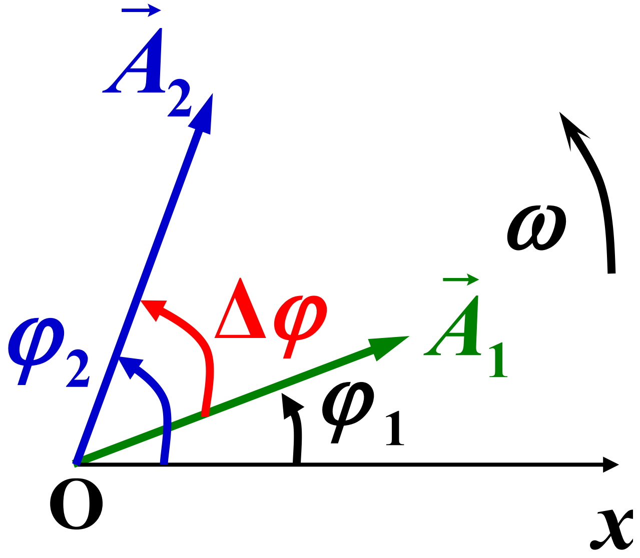
$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \quad x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\Delta\Phi = \left(\omega t + \varphi_2\right) - \left(\omega t + \varphi_1\right)$$

$$= \varphi_2 - \varphi_1$$

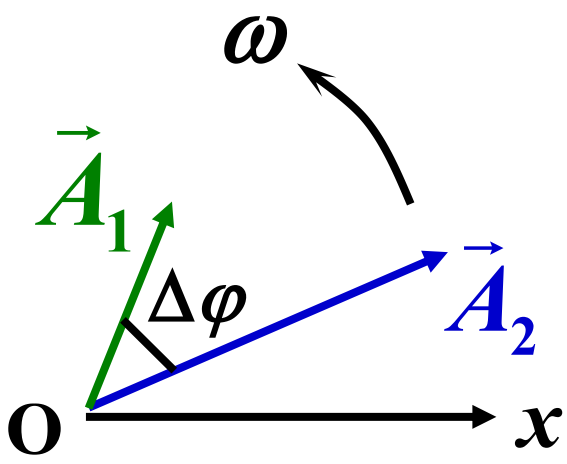
1. x_2比x_1相位超前：

$$\Delta\Phi=\varphi_2-\varphi_1>0$$



2. x_2比x_1相位落后：

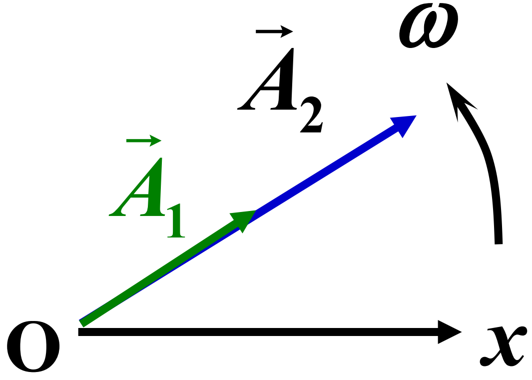
$$\Delta\Phi=\varphi_2-\varphi_1<0$$

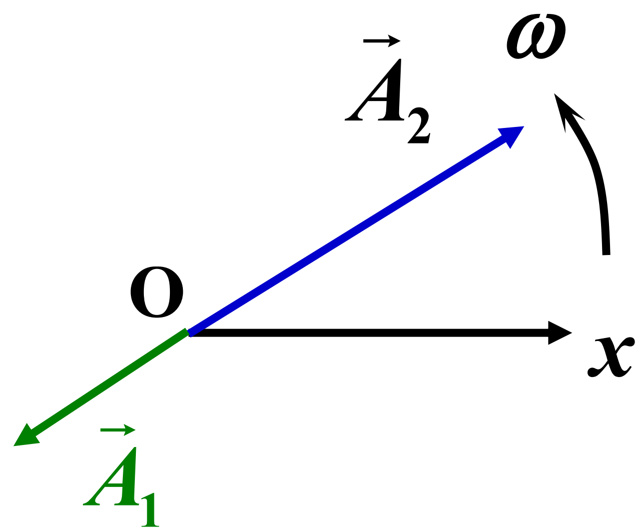


3. x_1和x_2相位相同（同相）

$$\Delta\Phi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$$

步调完全相同



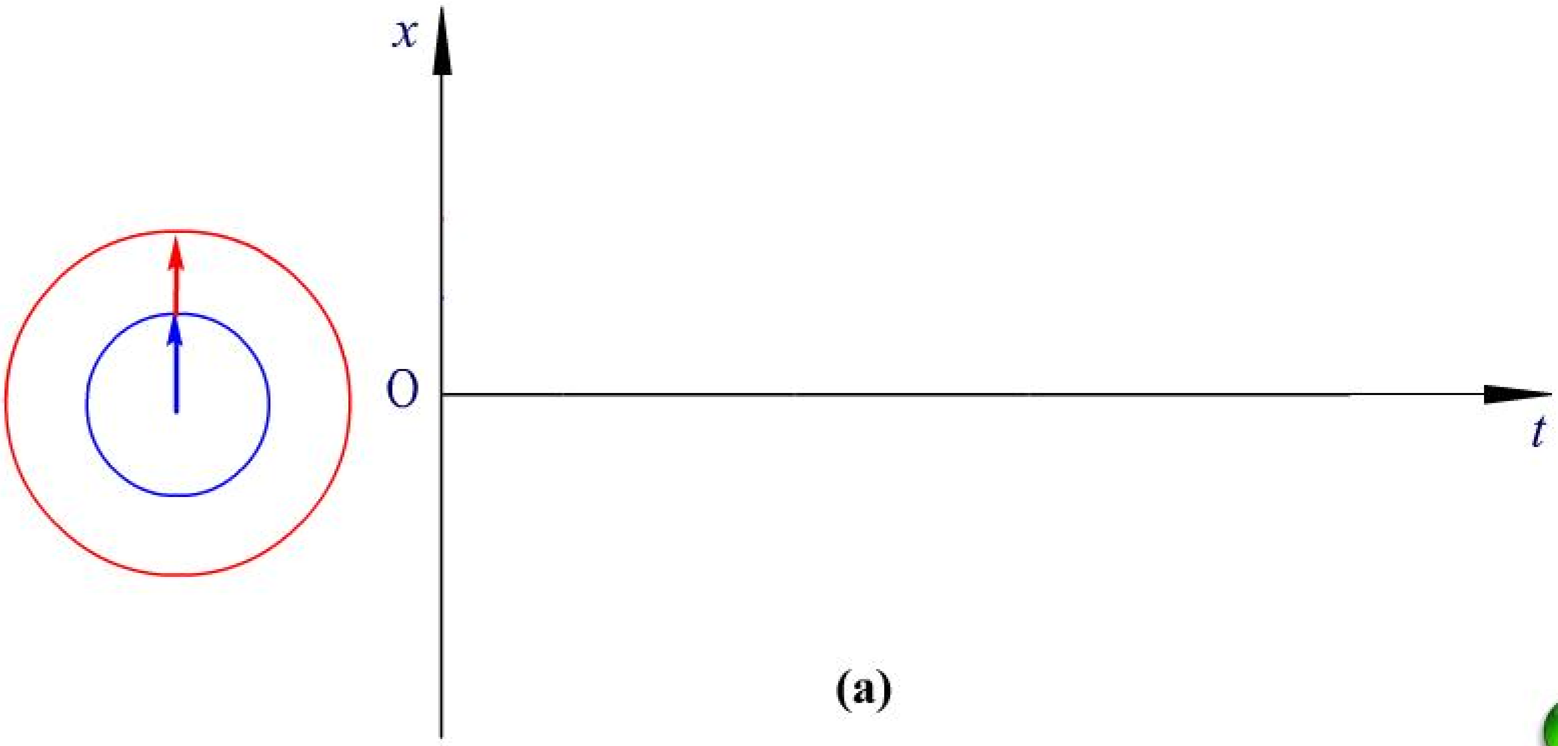


4. x_1和x_2相位相反（反相）

$$\Delta\Phi = \varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$$

步调完全相反

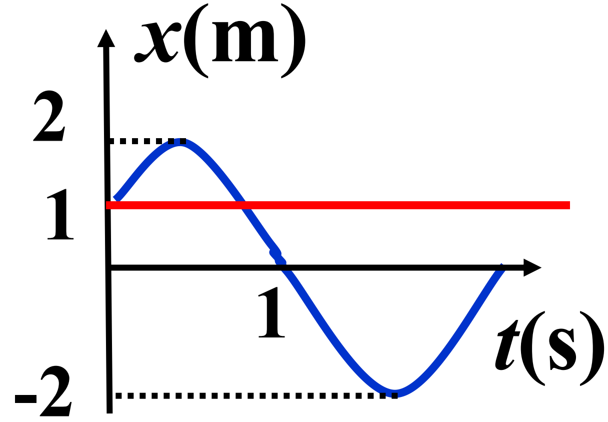
$\varphi_1-\varphi_2=0$ 两振动步调完全相同



(a)

例：已知某质点作谐振动，曲线如图。

求：振动表达式。



解：设 $x = A\cos(\omega t+\varphi)$

由图知：A=2m

$t=0$: $x_0 = 1 \quad v_0 > 0$

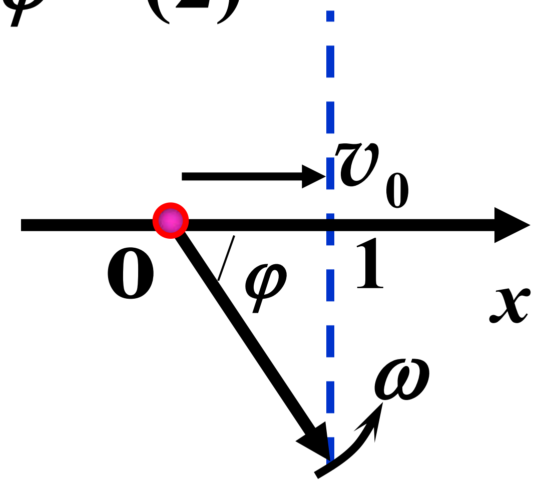
$x_0 = 2\cos\varphi = 1 \cdots (1)$

$v_0 = -A\omega\sin\varphi = -2\omega\sin\varphi \cdots (2)$

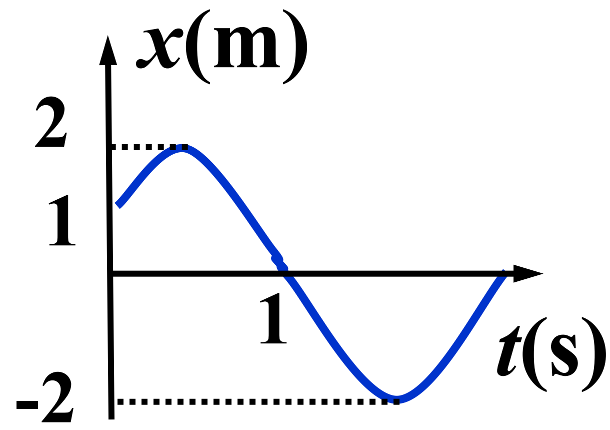
由(1)解得: $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{3}$

$\because \quad v_0 > 0 \quad \sin\varphi < 0$

$\therefore \quad \varphi = -\dfrac{\pi}{3}$



$t = 1\text{s}$: $x_1 = 0$ $v_1 < 0$

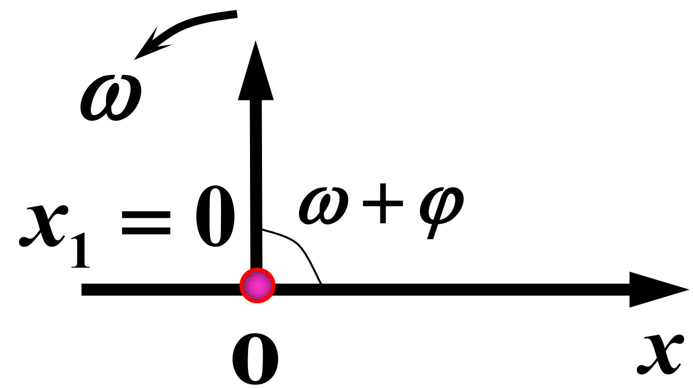


$$x_1 = 2\cos(\omega + \varphi) = 0 \cdots (3)$$

$$v_1 = -2\omega \sin(\omega + \varphi) \cdots (4)$$

由(3)解得：$\omega + \varphi = \pm \dfrac{\pi}{2}$

$\because \quad v_1 < 0 \qquad \sin(\omega + \varphi) > 0$



$\therefore \quad \omega + \varphi = \dfrac{\pi}{2}$

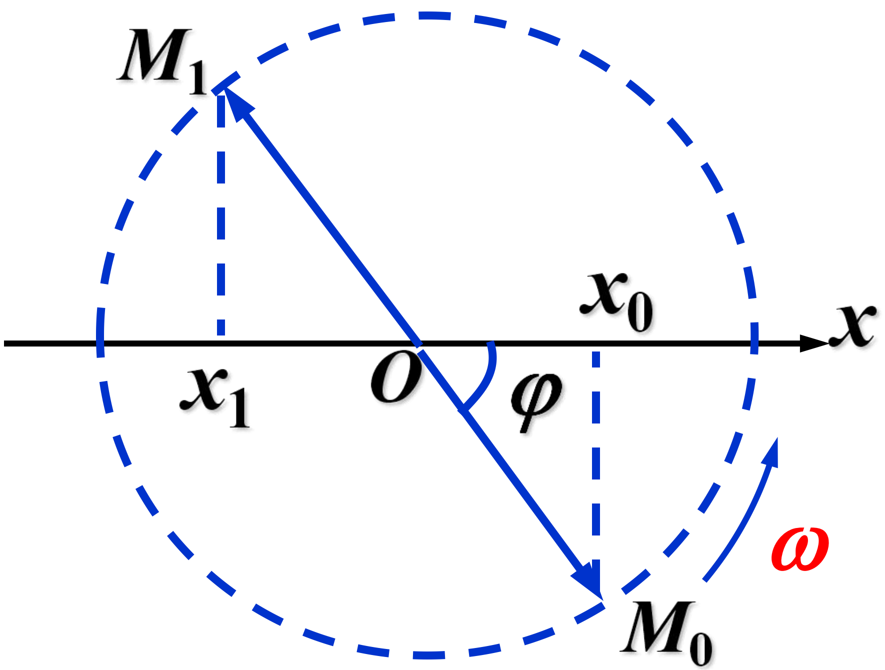
$$\omega = \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{3}) = \frac{5\pi}{6}$$

振动方程为：$x = 2\cos(\dfrac{5}{6}\pi t - \dfrac{\pi}{3})$

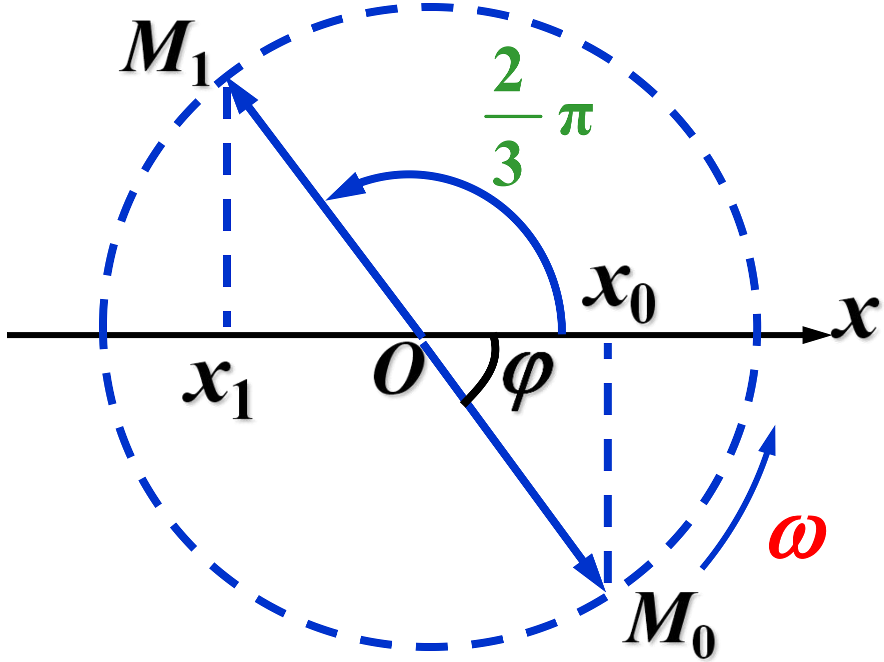
例：一质点沿x轴作简谐运动，振幅 A=0.06m，周期 $T=2$s，初始时质点位于 $x_0=0.03$ m处且向x轴正向运动。试求：

（1）初相位；

（2）在x_1=−0.03m处且向ox轴负方向运动时物体的速度和加速度，以及从这一位置回到平衡位置所需的最短时间。



解：（1）初相位



$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \ \mathrm{s}^{-1}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2} \qquad \varphi = -\frac{\pi}{3}$$

$$x = 0.06\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})\ (\mathrm{SI})$$

（2）速度和加速度

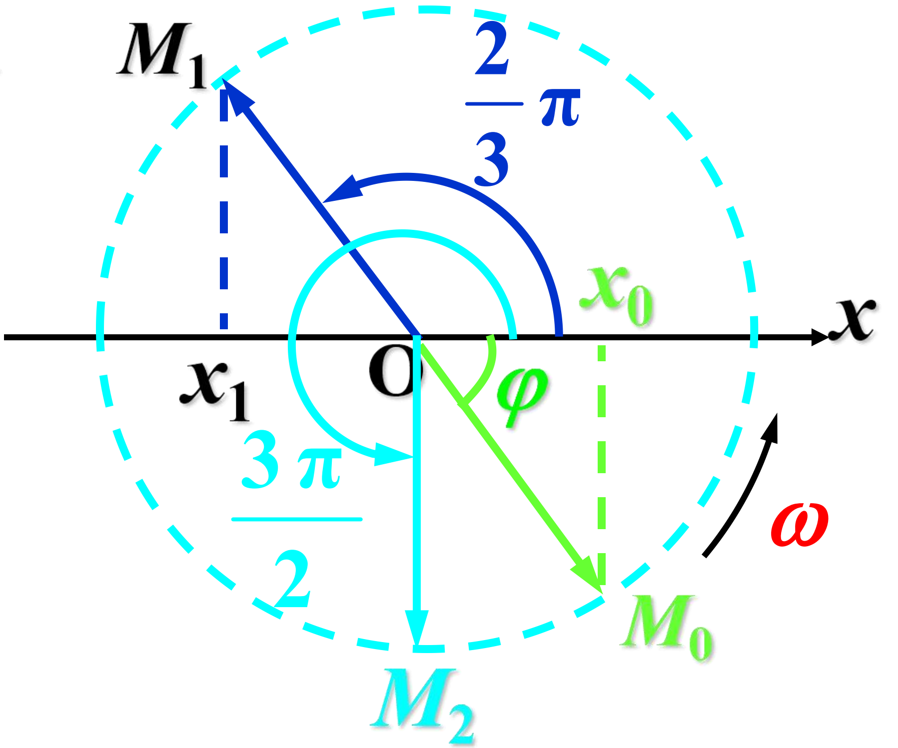
$$x = 0.06\cos(\pi t_1 - \frac{\pi}{3}) \qquad \pi t_1 - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore t_1 = 1\mathrm{s}$$

$$v=-0.06\pi\sin(\pi t_1-\frac{\pi}{3})=-0.16\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$a=-0.06\pi^2\cos(\pi t_1-\frac{\pi}{3})=0.30\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

从这一位置回到平衡位置所需的最短时间:



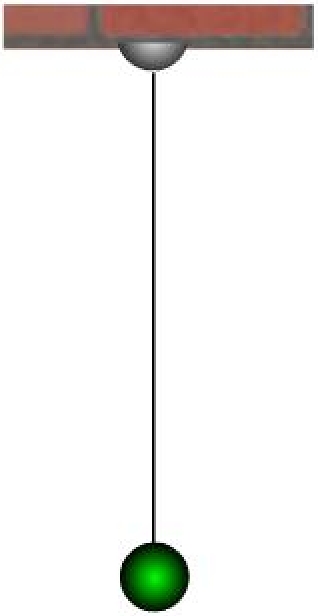
$$\omega\Delta t=\frac{3\pi}{2}-\frac{2}{3}\pi=\frac{5}{6}\pi$$

$$\Delta t=\frac{5}{6}=0.83\ \mathrm{s}$$

请总结用旋转矢量法计算初相位、相位差，运动时间间隔的方法！

四、简谐运动近似

（一）、单摆



$\theta < 5^\circ$ 时 $, \sin\theta \approx \theta$

$$M = -mgl\sin\theta \approx -mgl\theta$$

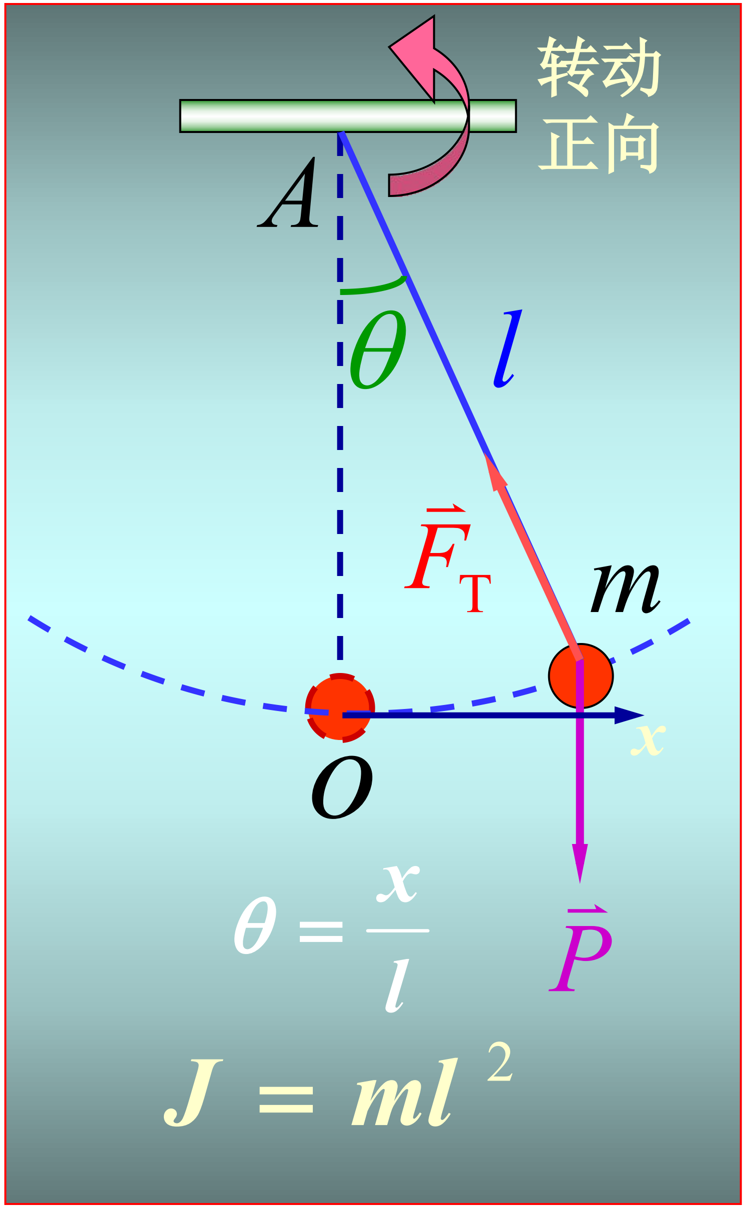
$$-mgl\theta = J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\theta \quad 令 \quad \omega^2 = \frac{g}{l}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\theta$$

$$\theta = \theta_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \varphi)$$

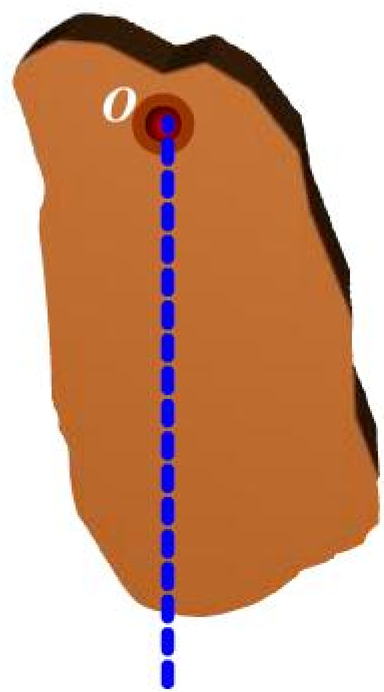
$$T = 2\pi\sqrt{l/g}$$



（二）、复摆

已知：轴至质心的距离 l，θ很小

摆的质量m、转动惯量J



$$M = J\beta$$

$$-mgl\sin\theta = J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{mgl}{J}\sin\theta = 0$$

$\sin\theta \approx \theta$ $\quad\therefore\quad$ $\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{mgl}{J}\theta = 0$

令 $\omega^2 = \frac{mgl}{J} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\theta = 0$ $\qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$

§5.3　简谐运动的能量

一、动能

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \qquad = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

二、势能

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

三、总机械能

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

说明

（1）总能量E与振幅A的平方成正比。

（2）动能和势能作周期性变化，周期为$T/2$。

（3）系统总能量守恒，动能和势能相互转化。

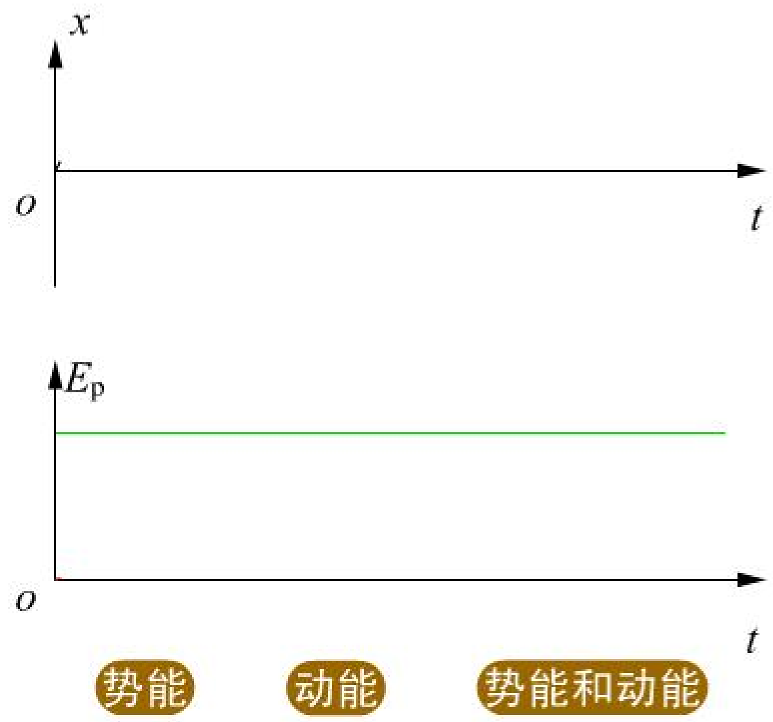
等幅振动

平衡位置：

动能最大，势能为零。

最大位移处：

势能最大，动能为零。



四、能量平均值

$$\boxed{\bar{f}=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t}$$

$$\overline{E}_k=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}kA^2$$

$$\overline{E}_p=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}kA^2$$

简谐运动系统的动能和势能在一个周期内的平均值相等，它们都等于总能量的一半。

用能量方法建立简谐运动方程

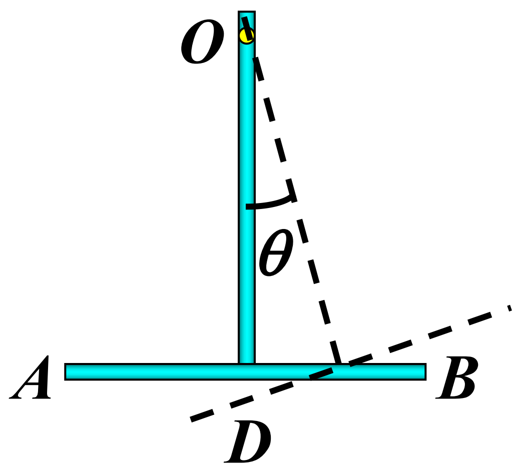
在忽略阻力的条件下，作简谐运动的系统只有动能E_k和势能E_p（包括弹性势能和重力势能等），且二者之和保持不变，因此有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_k + E_p) = 0$$

将具体问题中的动能和势能表达式代入上式，经简化后，可求得简谐运动的运动微分方程以及振动周期和频率等。

例：如图所示，一密度均匀的“T”字形细尺，由两根金属米尺组成。若它可绕通过O点且垂直纸面的水平轴转动，求其微小振动的周期。

解：设米尺长为l，质量为m。以地球和“T”字形尺为研究系统。不计阻力影响，则只有重力做功，系统的机械能守恒。



取“T”形尺处于平衡位置时系统势能为零，当“T”形尺转离平衡位置θ角时，系统的动能和势能分别为

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} J \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \right)^2$$

$$E_{\mathrm{p}} = mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta) + mgl(1-\cos\theta)$$

$$= \frac{3}{2}mgl(1-\cos\theta)$$

其中J是“T”形尺对轴O的转动惯量。根据平行轴定理，有

$$J = \frac{1}{3}ml^2 + (\frac{1}{12}ml^2 + ml^2) = \frac{17}{12}ml^2$$

因此有

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}\cdot\frac{17}{12}ml^2\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{3}{2}mgl(1-\cos\theta) = C$$

将上式对时间 t 求导，有

$$\frac{17}{12}ml^2\cdot\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3}{2}mgl\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = 0$$

因为是微小振动，所以 $\sin\theta \approx \theta$ ，代入上式得

$$\frac{17}{12}ml^2\cdot\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3}{2}mgl\theta\frac{d\theta}{dt} = 0$$

整理后即得

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{18g}{17l}\theta=-\omega^2\theta$$

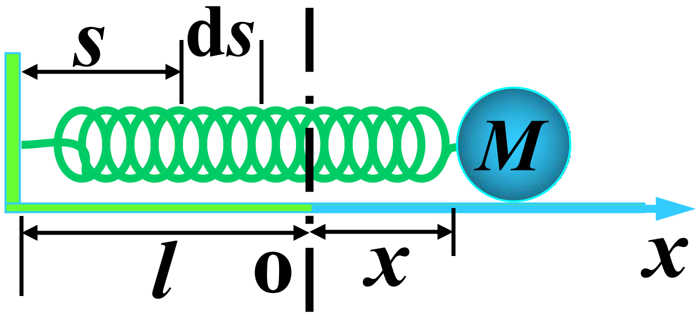
式中 $\omega^2=\dfrac{18g}{17l}$ ，可见系统作简谐运动，其振动周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{17l}{18g}}=2\times3.14\times\sqrt{\frac{17\times1\ \mathrm{m}}{18\times9.8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}}}=1.95\ \mathrm{s}$$

例：劲度系数为k、原长为l、质量为m的均匀弹簧，一端固定，另一端系一质量为 M 的物体，在光滑的水平面上作直线运动，求解其运动。

解： 取弹簧元ds

其质量 $\mathrm{d}m = \frac{m}{l}\mathrm{d}s$



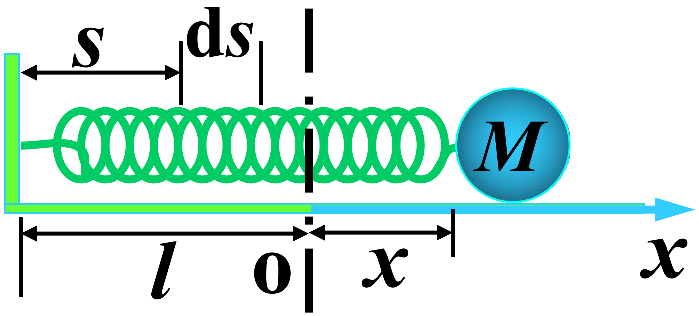
位移 $\frac{s}{l}x$

速度 $\frac{s}{l}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

弹簧的动能：

$$E_{k1}=\int_0^l \frac{1}{2}(\frac{m}{l}\mathrm{d}s)\cdot(\frac{s}{l}v)^2=\frac{1}{6}mv^2$$

物体的动能：



$$E_{k2}=\frac{1}{2}Mv^2$$

弹簧的势能：$E_p=\dfrac{1}{2}kx^2$

$$\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{6}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=C$$

$$\frac{1}{2}(M+\frac{1}{3}m)v^2+\frac{1}{2}kx^2=\mathrm{C}$$

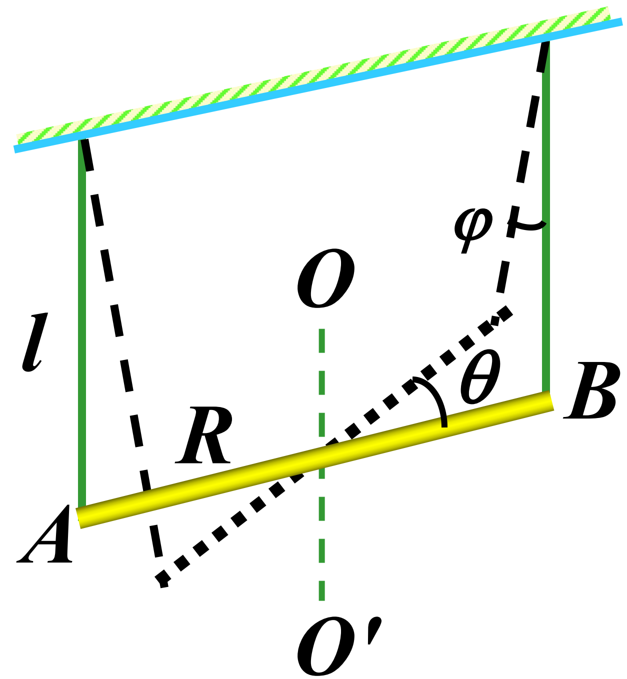
$$(M+\frac{1}{3}m)v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0 \qquad \omega^2=\frac{k}{M+m/3}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{M+m/3}{k}}$$

例：一均匀细棒AB的两端，用长度都为l且不计质量的细线悬挂起来，当棒以微小角度绕中心轴OO'扭动时，求证其运动周期为:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{3g}}$$



解：$$E_k = \frac{1}{2}J(\frac{d\theta}{dt})^2$$

$$E_P = mgh_c$$

$$h_c = l(1-\cos\varphi) \qquad J = \frac{1}{12}m(2R)^2 = \frac{1}{3}mR^2$$

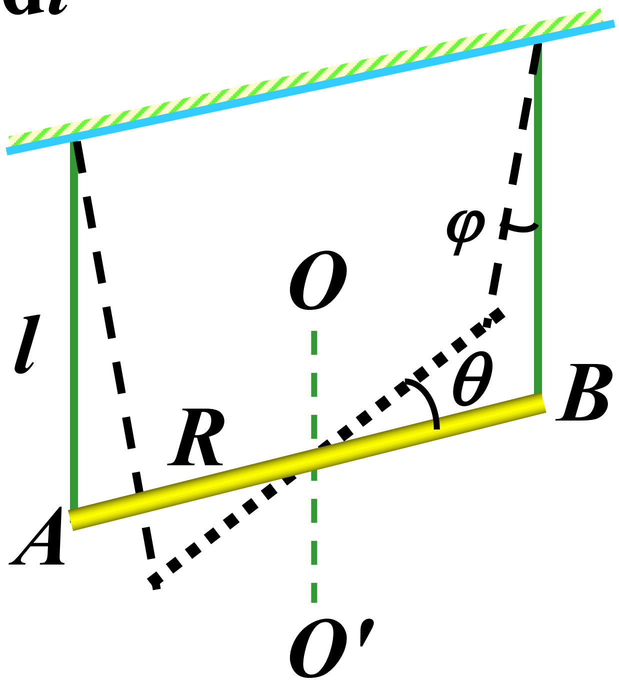
$$E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}mR^2\right)\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + mgl(1-\cos\varphi) = \mathrm{C}$$

$$\frac{1}{3}mR^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + mgl\sin\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\sin\varphi \approx \varphi = \frac{R}{l}\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{3g}{l}\theta = -\omega^2\theta$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{3g}}$$



§ 5.4　振动方向相互平行的简谐运动的合成

一、振动方向相互平行的两个同频率简谐运动的合成

设一质点同时参加两个谐振动

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

旋转矢量法

$$x = x_1 + x_2$$

$$= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

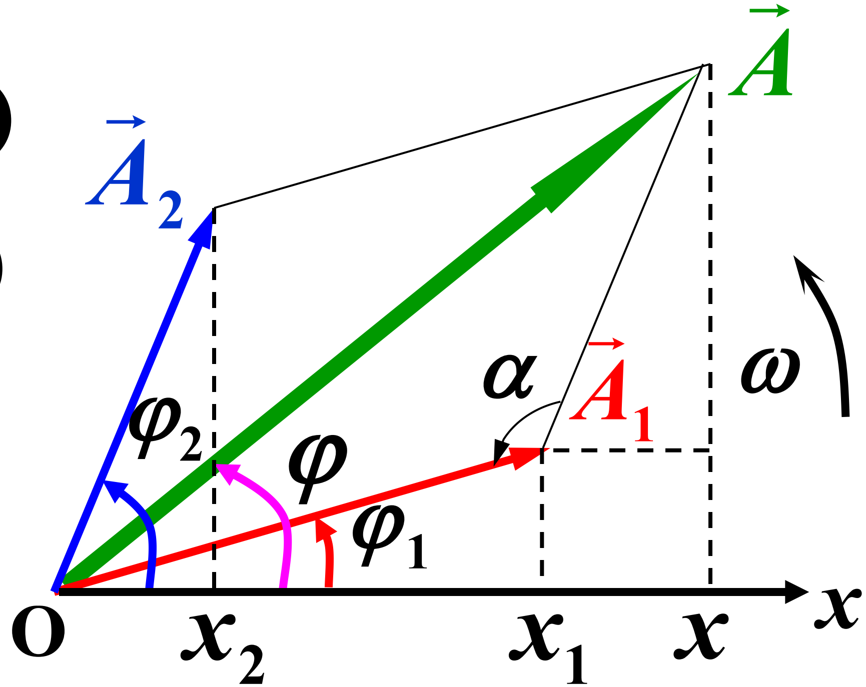

o
x

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= x_1 + x_2$$



结论 合振动仍为谐振动，频率与分振动频率相同。

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)]}$$

$$= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

A不仅与A_1，A_2有关，而且与 $\varphi_2-\varphi_1$ 有关。

讨论

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

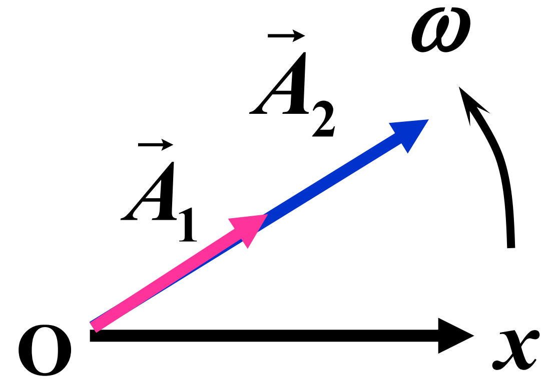
(1) $\varphi_2-\varphi_1 = 2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$

$$\cos(\varphi_2-\varphi_1) = 1$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2}$$

$$= A_1 + A_2$$

合振幅最大

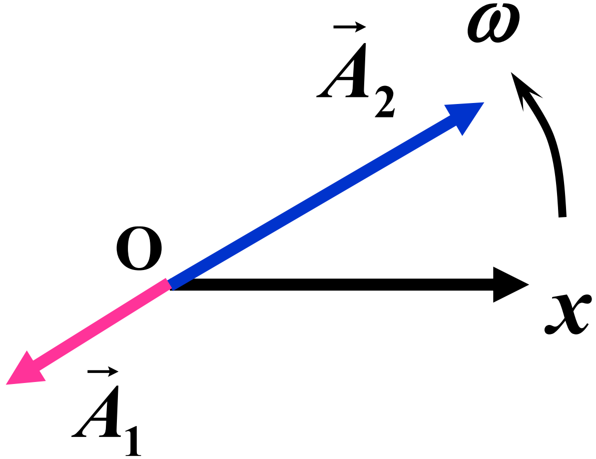


(2) $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2}$$

$$= \left| A_1 - A_2 \right|$$

合振幅最小



若$A_1 = A_2$： $A = 0$，质点静止。

(3) 一般情况下：

$$2k\pi < \varphi_2 - \varphi_1 < (2k+1)\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$$

$$\left| A_1 - A_2 \right| < A < A_1 + A_2$$

在同频率振动合成中，相位差起重要作用。

例： 已知：$x_1 = 0.05\cos(10t + 3\pi/4)$

$$x_2 = 0.06\cos(10t + \pi/4)$$

求：合振动

解： $A_1 = 0.05\text{m}$，$A_2 = 0.06\text{m}$

$\varphi_1 = 3\pi/4$，$\varphi_2 = \pi/4$.

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

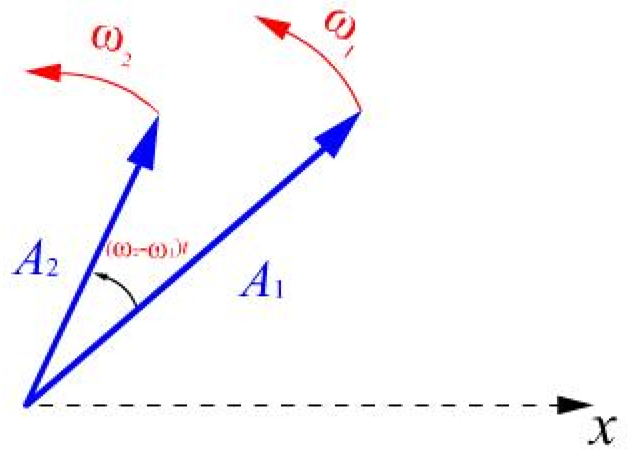
$$= 0.078\ \text{m}$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = 11$$

$$\pi/4 < \varphi < 3\pi/4 \qquad \therefore \varphi = 84.8^\circ$$

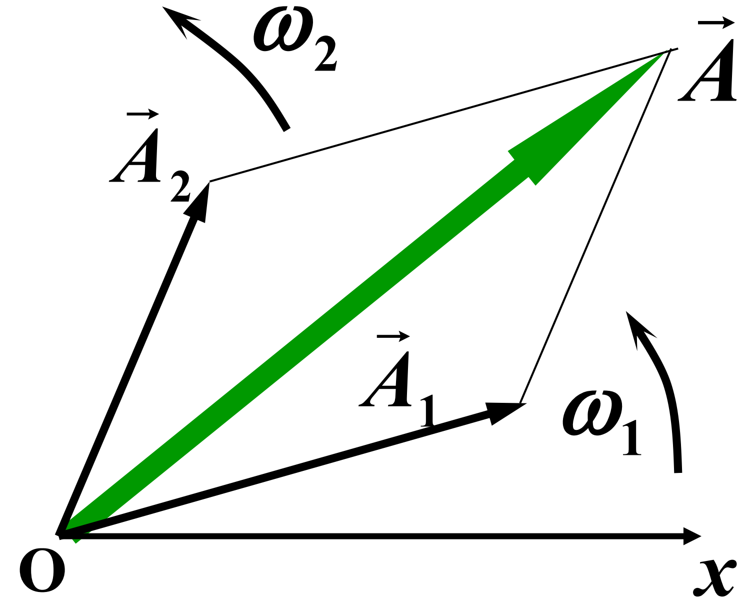
$$\therefore \quad x = 0.078\cos(10t + 84.8^\circ)\ \text{m}$$

二、振动方向相互平行的两个不同频率谐振动的合成



$$x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$



$\omega_1 \neq \omega_2$

$\vec{A}$: 大小变化

角速度ω也变化

结论 合振动不是谐振动

ω_1、ω_2很大, $|\omega_1 - \omega_2|$很小时：“拍”现象

令 $A_1 = A_2 = A_0 \quad \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \quad \omega_2 > \omega_1$

$$x_1 = A_0 \cos \omega_1 t \qquad x_2 = A_0 \cos \omega_2 t$$

$$x = x_1 + x_2 = A_0 \cos \omega_1 t + A_0 \cos \omega_2 t$$

$$\boxed{= 2A_0 \underbrace{\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t)}_{}\underbrace{\cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t)}_{}}$$

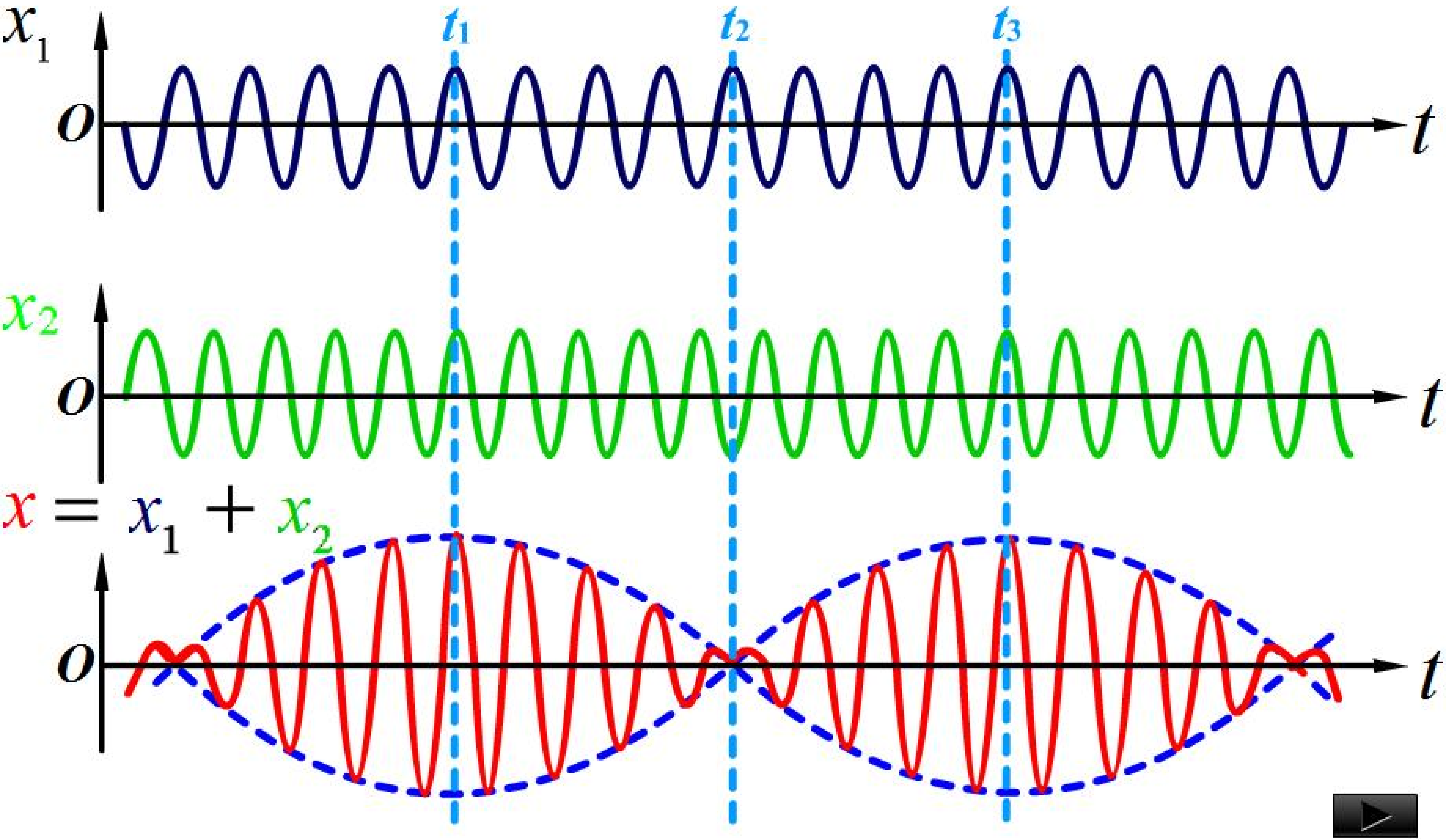
角频率为 $(\omega_2 - \omega_1)/2$ 的简谐振动

角频率为 $(\omega_1 + \omega_2)/2$ 的简谐振动

随时间变化很慢，可看作合振动的振幅。

随时间变化很快，可看作振动的部分。

$$\omega_2 - \omega_1 << \omega_2 + \omega_1$$


x_1
t_1
t_2
t_3
o
t
x_2
o
t
$x = x_1 + x_2$
o
t

拍：两个频率很大，频率差很小的同方向谐振动合成时，合振动振幅时大时小周期性变化的现象。

合振幅：$A = \left| 2A_0 \cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t) \right|$

圆频率：$\omega = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$

合振动是一个准谐振动

$$x = 2A_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right)$$

1. 合振幅变化的周期和频率：

$$T_{拍} = \frac{\pi}{\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

拍频：$\nu = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = \nu_2 - \nu_1$

2. 合振动的周期和频率：

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2} \qquad f = \frac{\omega_1 + \omega_2}{4\pi} = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$$

§ 5.5　振动方向相互垂直的简谐运动的合成

一、两个相互垂直的同频率谐振动的合成

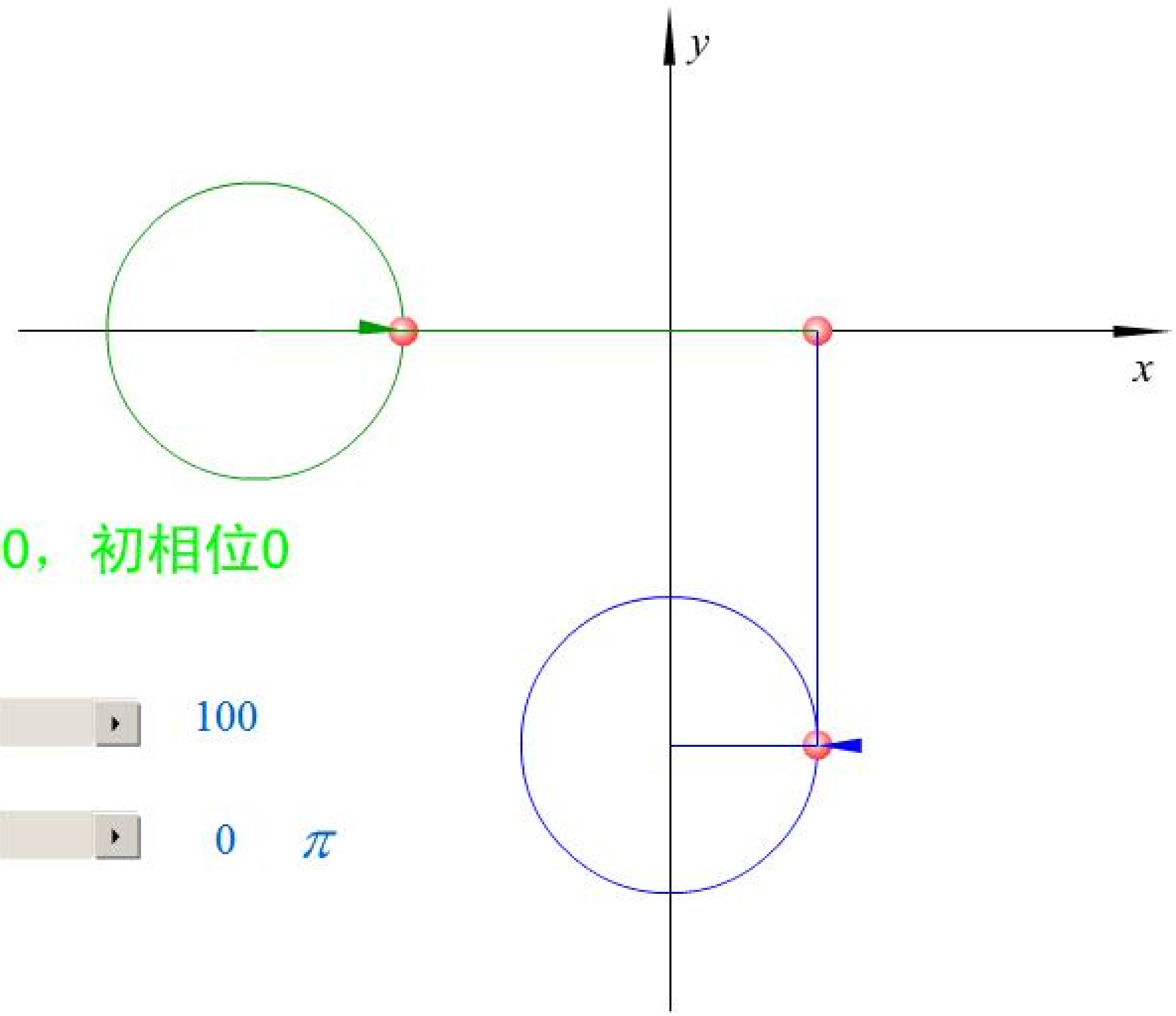
$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

质点运动的轨迹方程：

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

垂直相同频率振动的合成



绿色频率100，振幅100，初相位0

蓝色振幅 100

蓝色相位 0 π

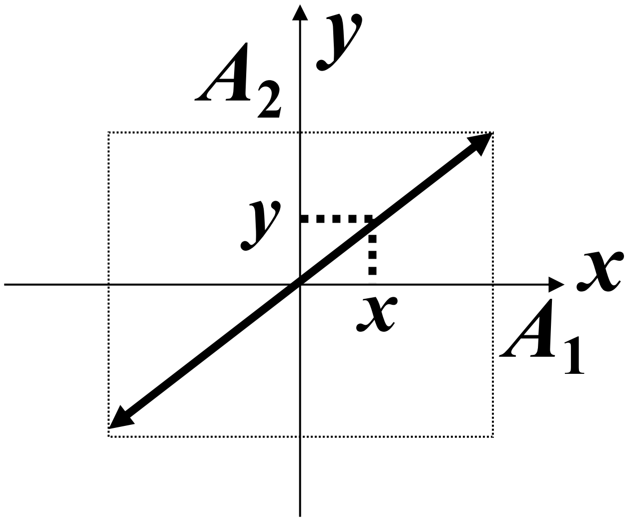
1. $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ 同相

轨迹方程：$\dfrac{x^2}{A_1^2} + \dfrac{y^2}{A_2^2} - 2\dfrac{xy}{A_1 A_2} = 0$

$$y = \frac{A_2}{A_1}x$$

$$S = \sqrt{x^2 + y^2}$$

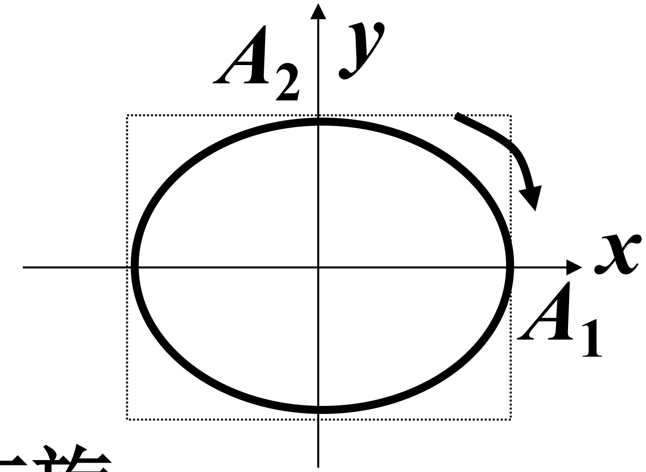
$$= \sqrt{A_1^2 + A_2^2}\cos(\omega t + \varphi)$$



结论 在斜率为 A_2/A_1 的直线上作谐振动。

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \qquad \varphi = \varphi_1 = \varphi_2$$

2. $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$



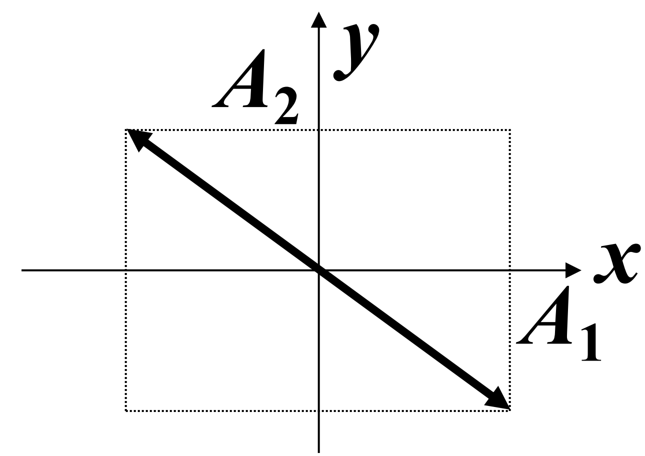
轨迹方程：$\dfrac{x^2}{A_1^2} + \dfrac{y^2}{A_2^2} = 1$

结论

沿椭圆顺时针旋转 — 右旋

若$A_1 = A_2$：圆轨迹

3. $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ 反相



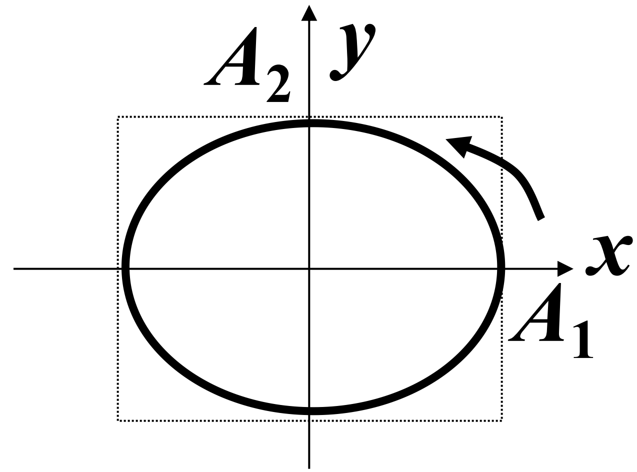
轨迹方程：$y = -\dfrac{A_2}{A_1}x$

结论

在斜率为 - A_2/A_1 的直线上作谐振动。

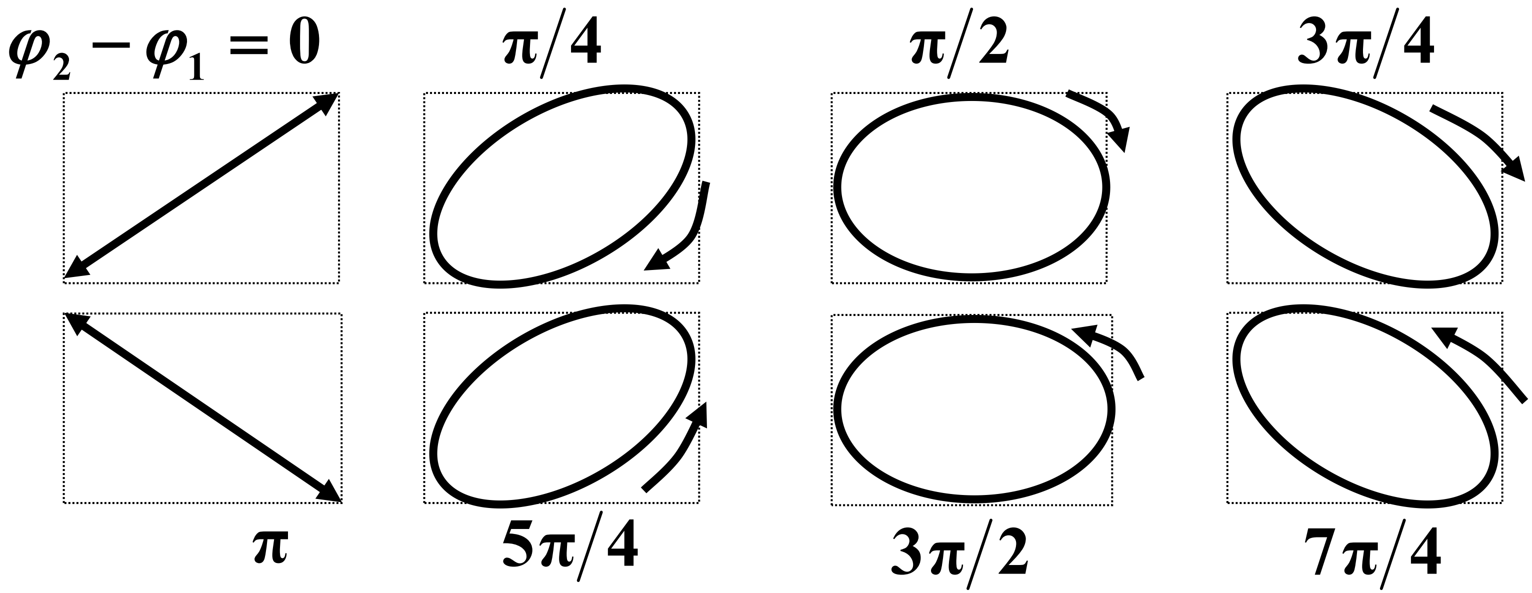
4. $\varphi_2-\varphi_1=3\pi/2$

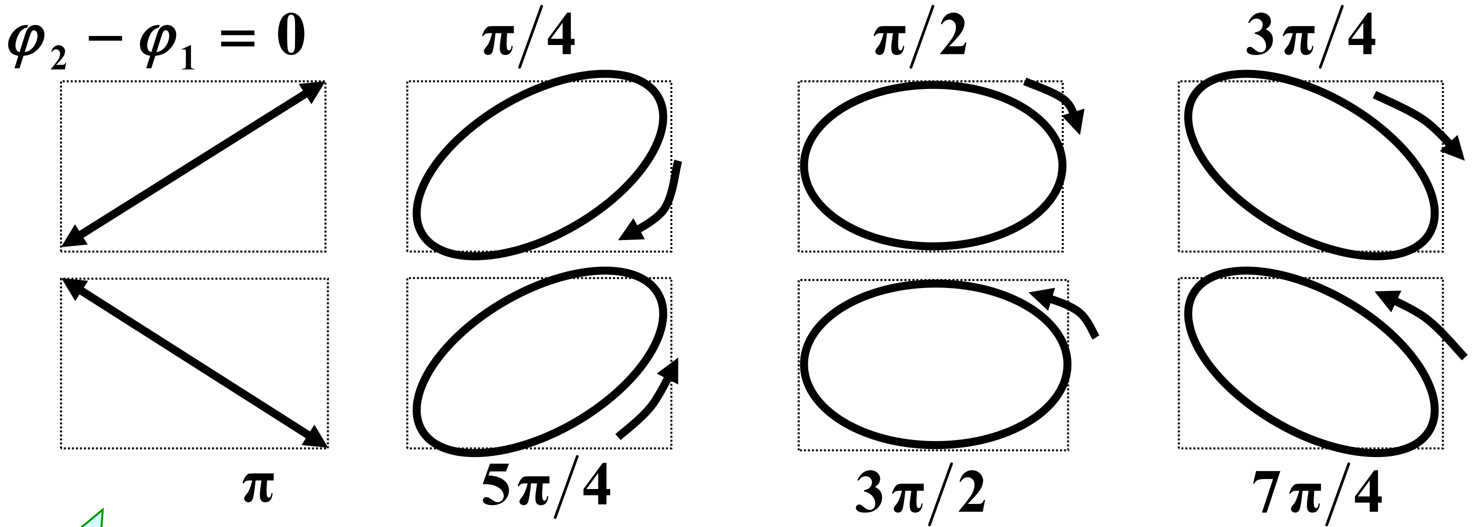
轨迹方程：$\dfrac{x^2}{A_1^2}+\dfrac{y^2}{A_2^2}=1$



结论

沿椭圆逆时针旋转 — 左旋





总结 （1）合运动是一直线或椭圆运动。

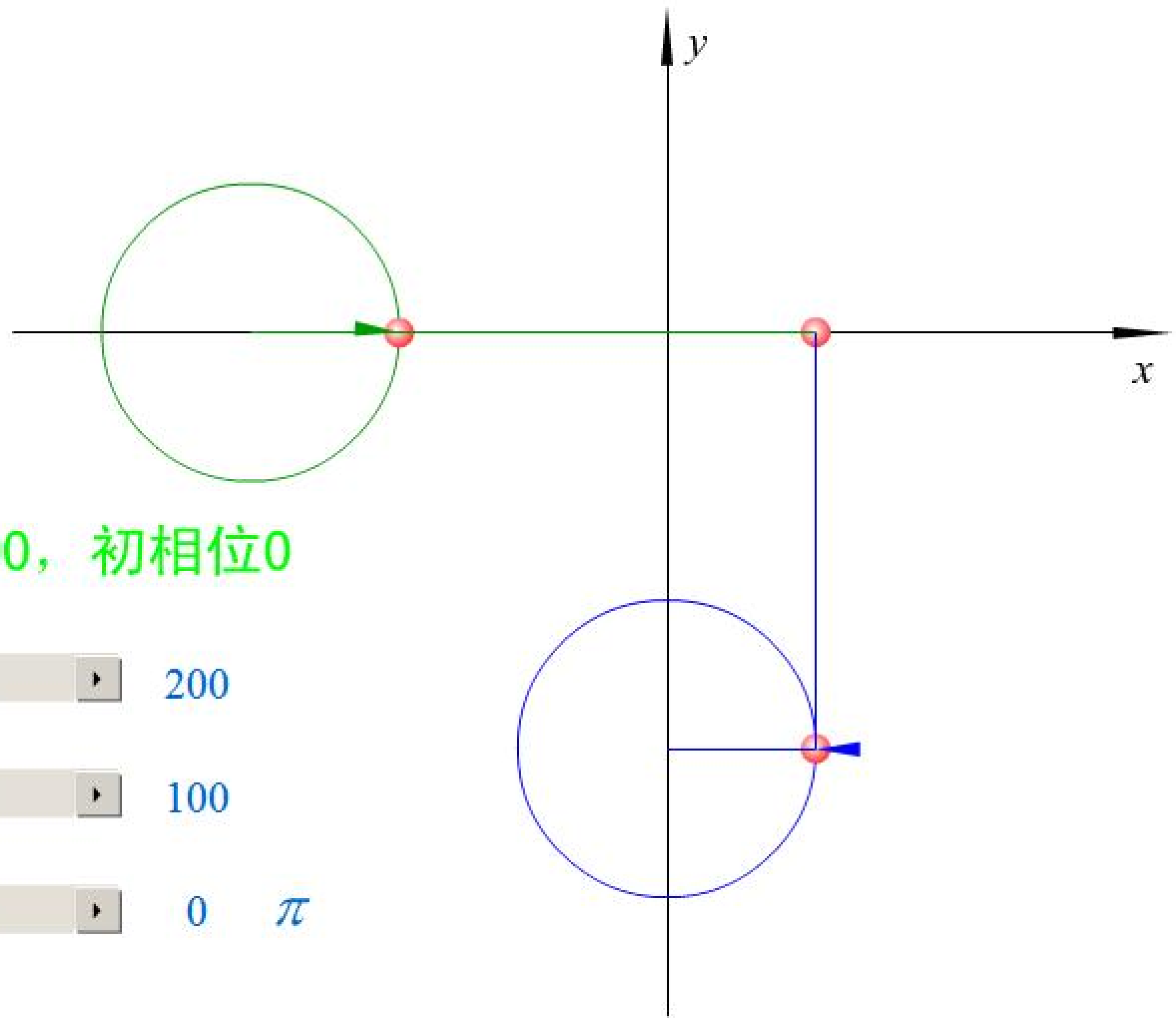
（2）只有两振动同相或反相时，合振动才是谐振动 — 直线谐振动。

二、两个相互垂直不同频率谐振动的合成

1\. 两频率差值很小时：$\Delta\Phi=(\omega_2-\omega_1)t+\Delta\varphi$

合运动轨迹随时间缓慢变化

垂直不同频率振动的合成



绿色频率100，振幅100，初相位0

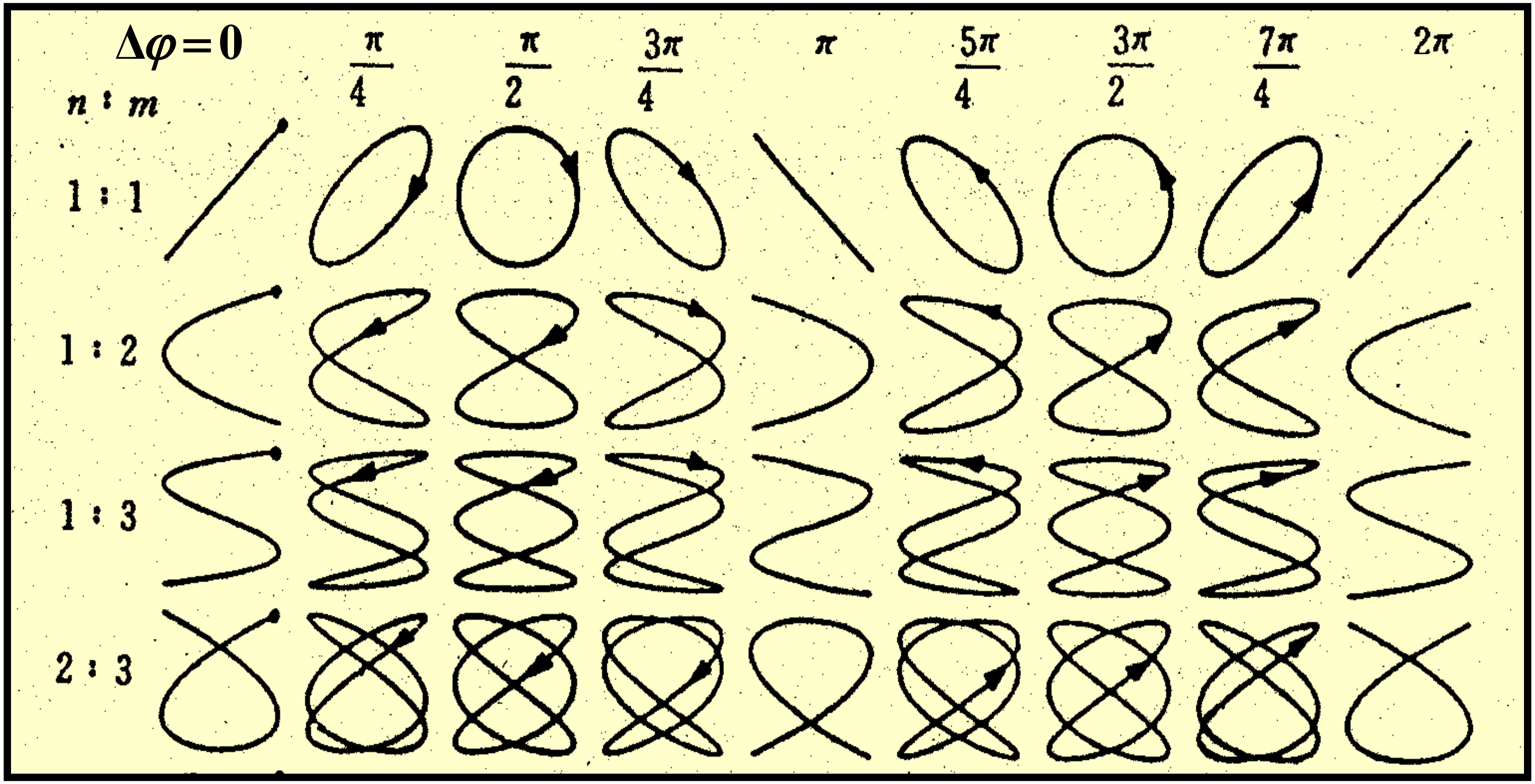
蓝色频率 200

蓝色振幅 100

蓝色相位 0 π

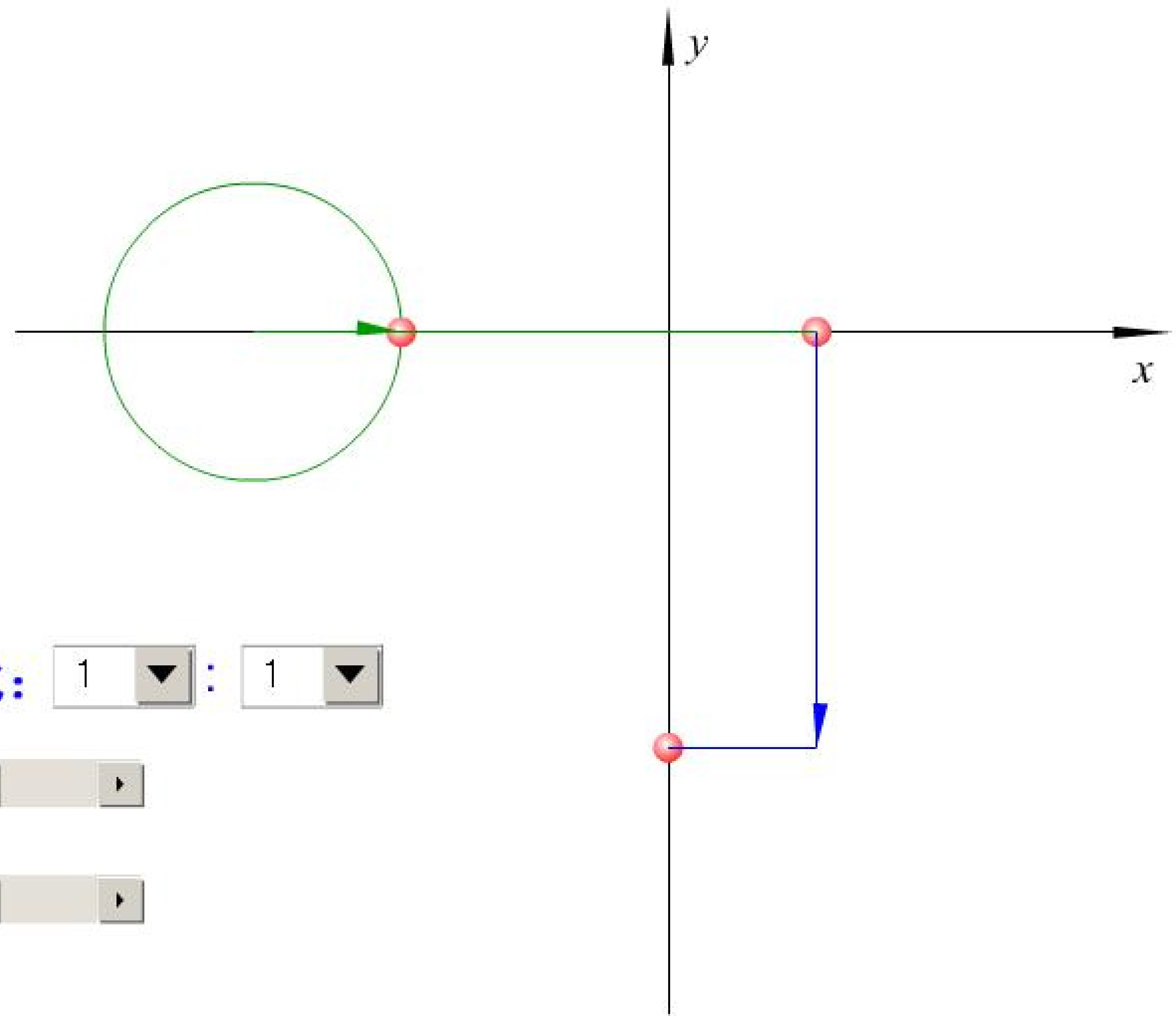
（2）两振动的频率成整数比：$\nu_2 : \nu_1 = n : m$

李萨如图形



测定谐振动的频率、比较相位差。

垂直不同频率振动的合成



蓝色与绿色频率之比：1 : 1

蓝色振幅

蓝色相位

*§5.6 阻尼振动，受迫振动

一、阻尼振动

1. 定义 振幅随时间减小的振动。

2. 阻尼的两种形式

（1）摩擦阻尼

阻尼力：$f = -\gamma v = -\gamma \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

γ --阻力系数

（2）辐射阻尼

3. 运动方程

$$F + f = ma$$

$$-kx - \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}x = 0$$ 令：$\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ $\beta = \dfrac{\gamma}{2m}$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2x = 0}$$

ω_0 —固有圆频率

β —阻尼因子

（1）阻力较小时：$\beta < \omega_0$ 弱阻尼

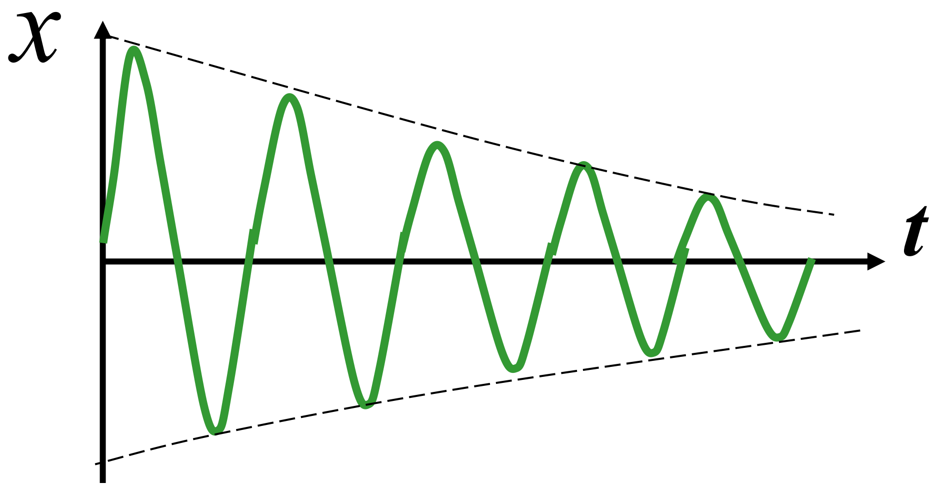
$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi) \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$$

振幅：$A = A_0 e^{-\beta t}$

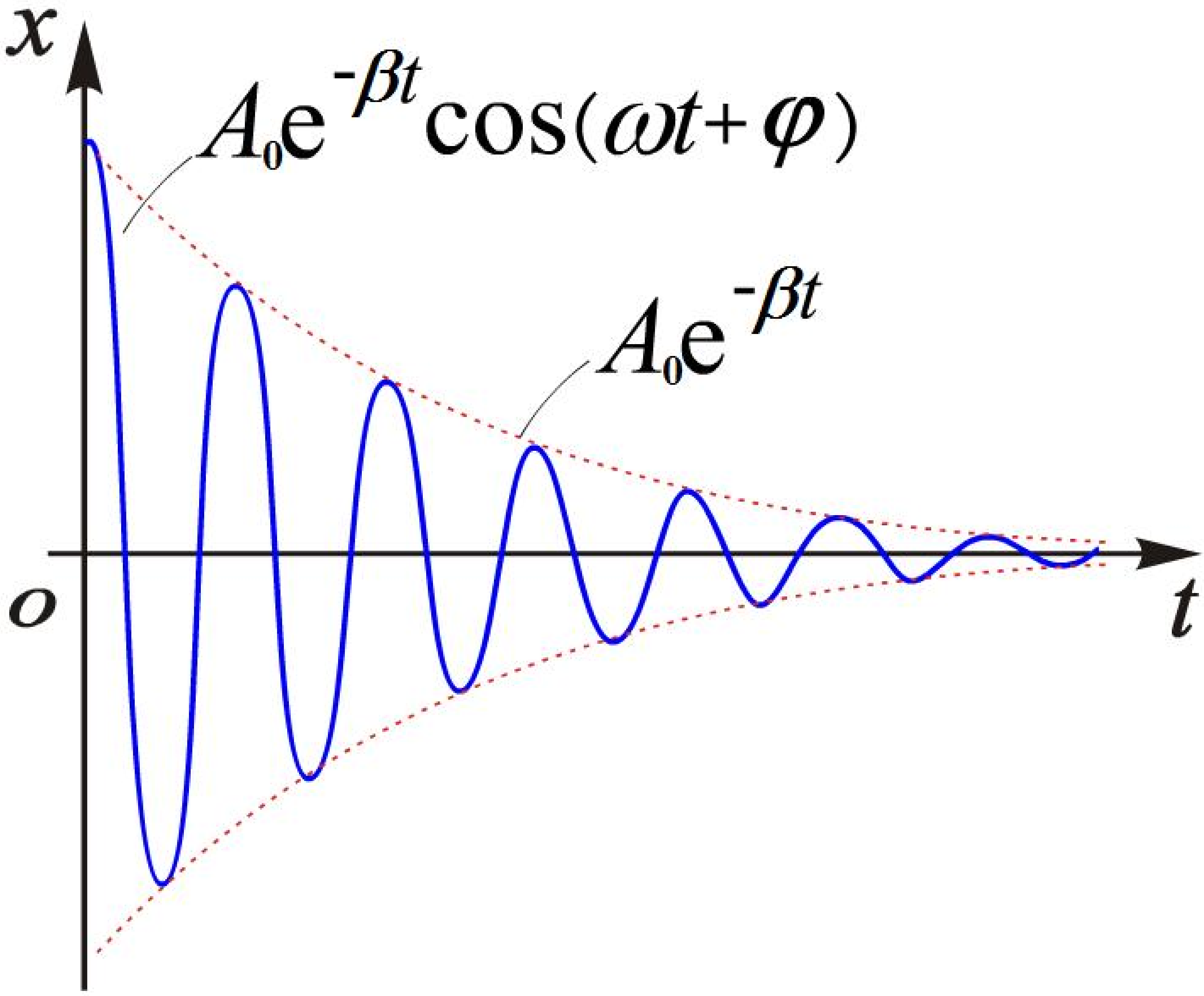
圆频率：$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

周期：$T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} > T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$



减幅振动

准周期运动



x
$A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi)$
$A_0 e^{-\beta t}$
o
t

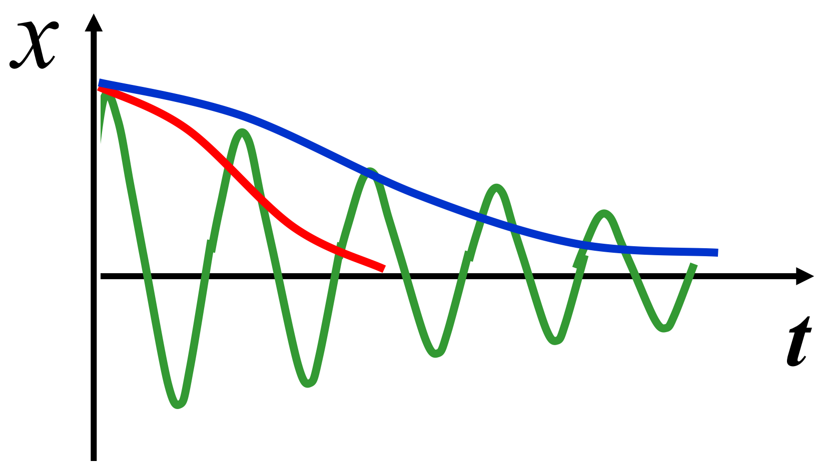
β变大时：

（2）临界阻尼（$\beta=\omega_0$）

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}=0$$

$x=(C_1+C_2t)e^{-\beta t}$ 很快衰减！

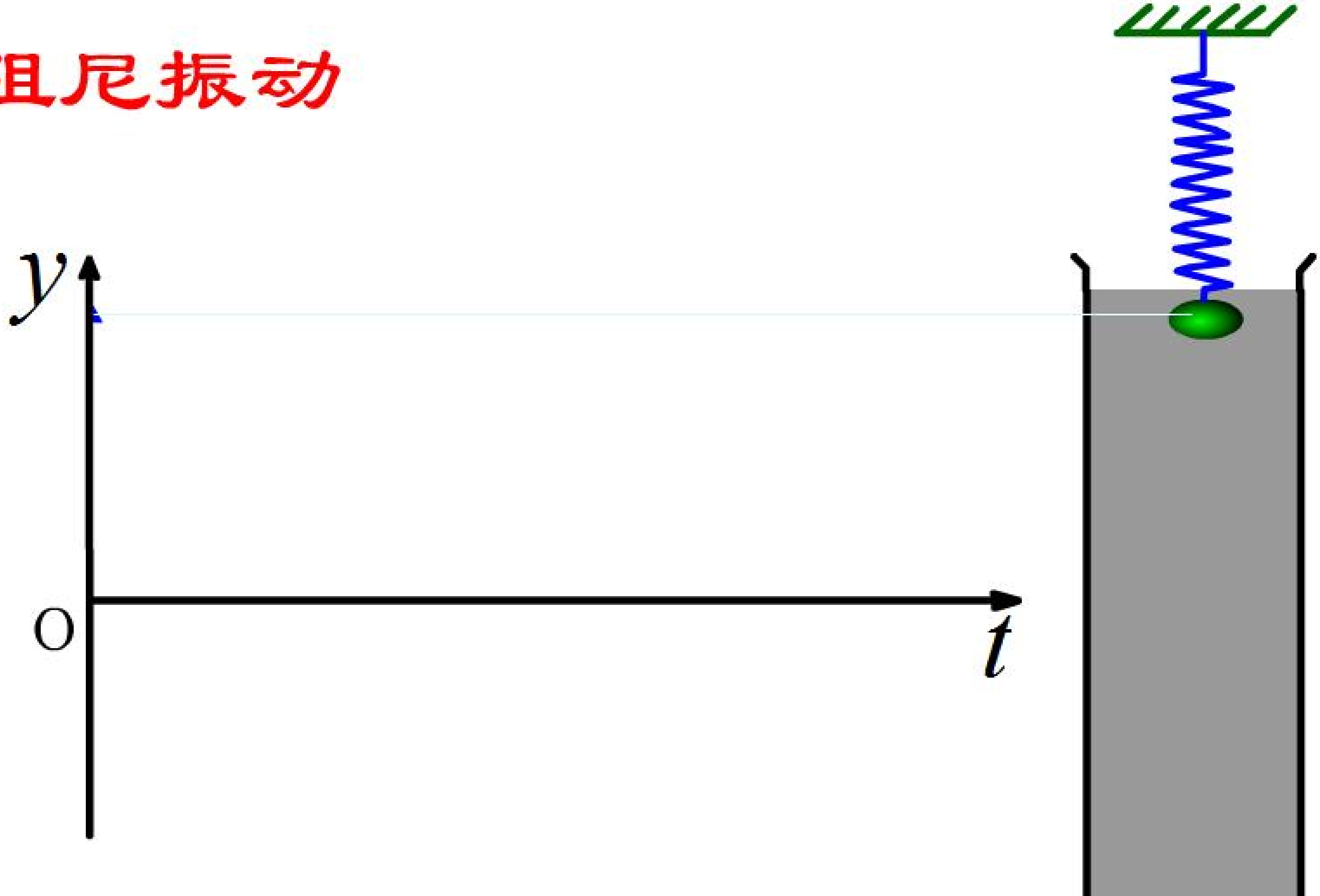
介于准周期运动和非周期运动之间



（3）过阻尼（$\beta>\omega_0$）

非周期运动！

阻尼振动



弱阻尼

二、受迫振动

1. 定义　物体在周期性外力的持续作用下发生的振动。

强迫力：$F = F_0 \cos \Omega t$

2. 运动方程

$$-kx - \gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + F_0 \cos \Omega t = m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

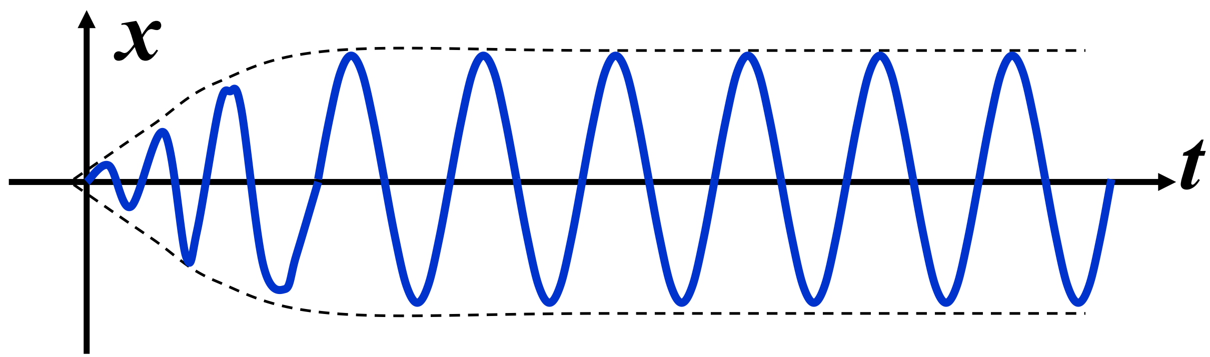
$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$$

解：$x = \underbrace{A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi')}_{\text{阻尼振动}} + \underbrace{A\cos(\Omega t + \varphi)}_{\text{等幅振动}}$

稳定时：$\boxed{x = A\cos(\Omega t + \varphi)}$

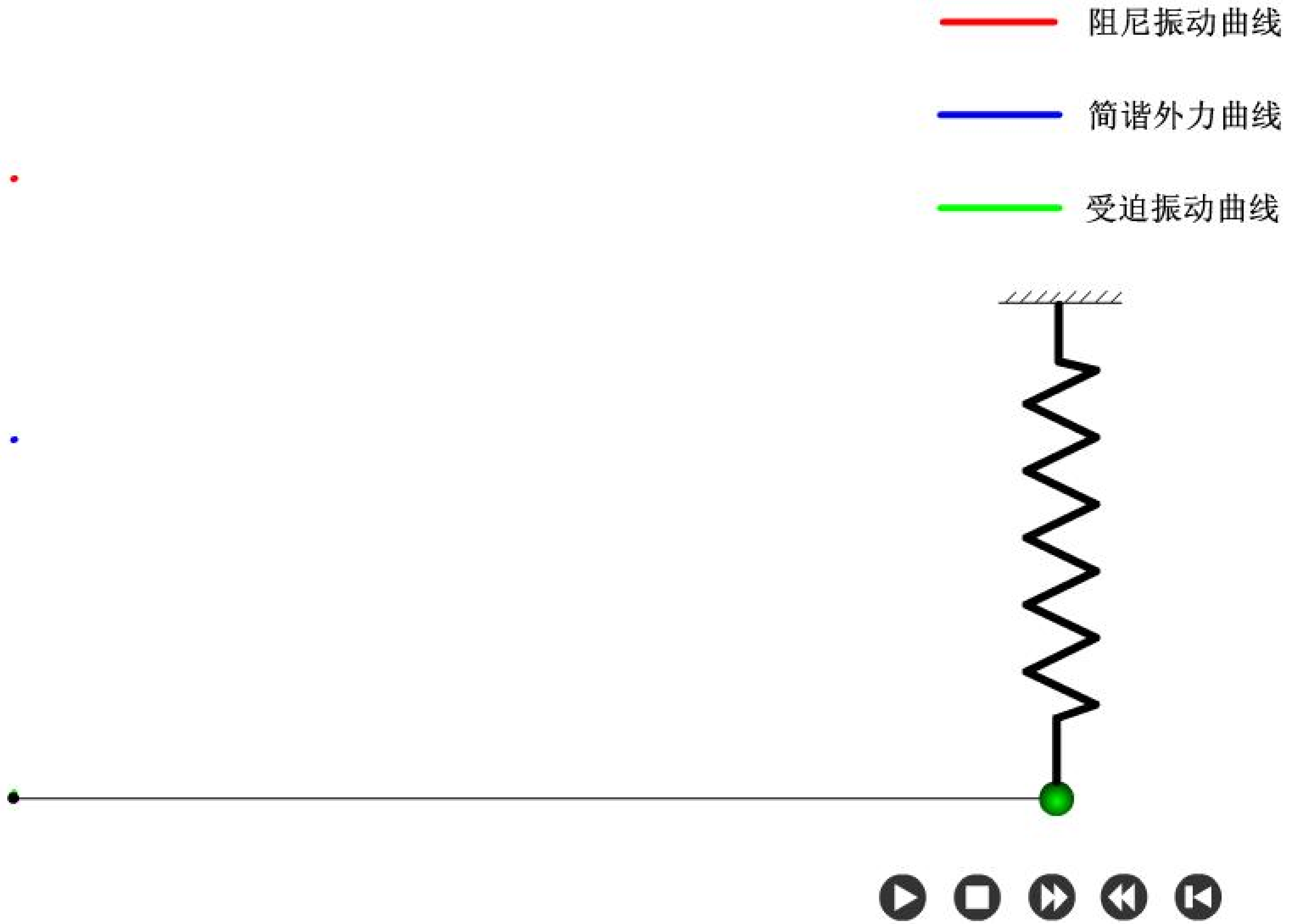
$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} \qquad \varphi = \cot\left(\frac{-2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$



结论

稳定的受迫振动是**等幅振动**，频率为强迫力的频率，A与 F_0.Ω. m. β.ω_0有关。

受迫振动



三、共振

1. 定义 在外来周期性力作用下振幅达到极大的现象。

2. 条件

$$A=\frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2}}$$

令 $\dfrac{\partial A}{\partial \Omega}=0$

共振角频率：$\Omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$

共振振幅：$A_r=\dfrac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$

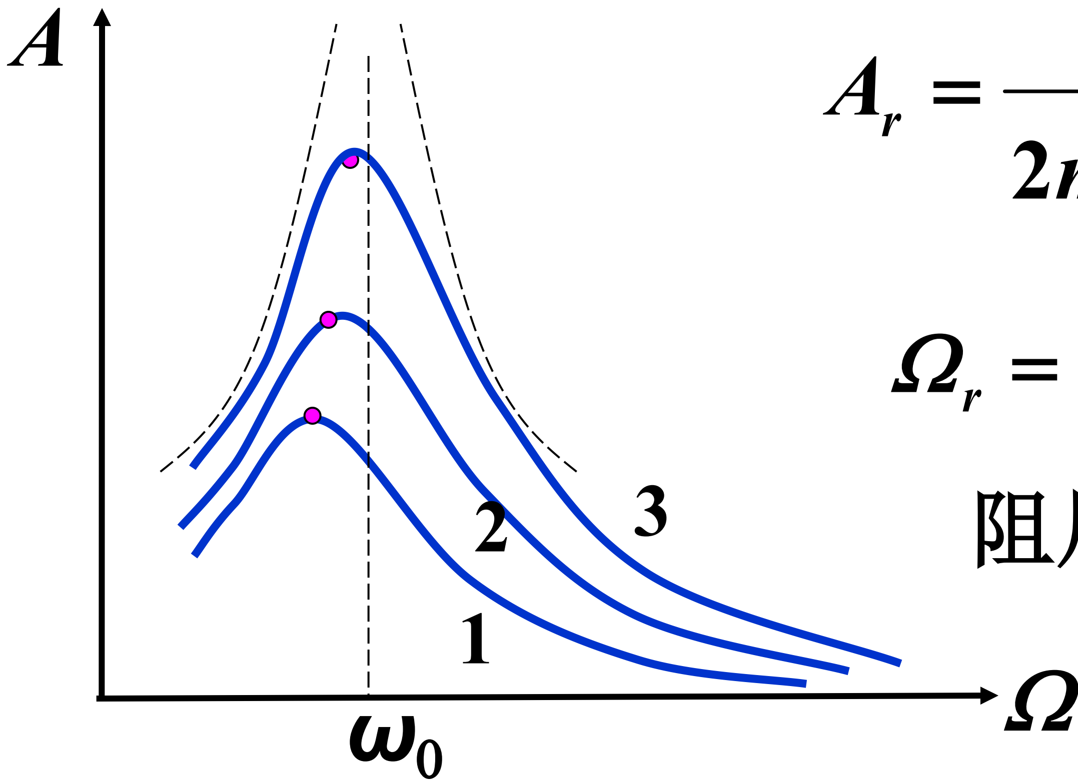
讨论

(1) 共振频率小于固有频率 ω_0

当 $\beta=0$ 时，$\Omega_r=\omega_0$

（2）强迫力频率Ω接近ω_0，振幅增大。

达到共振频率时，振幅最大。



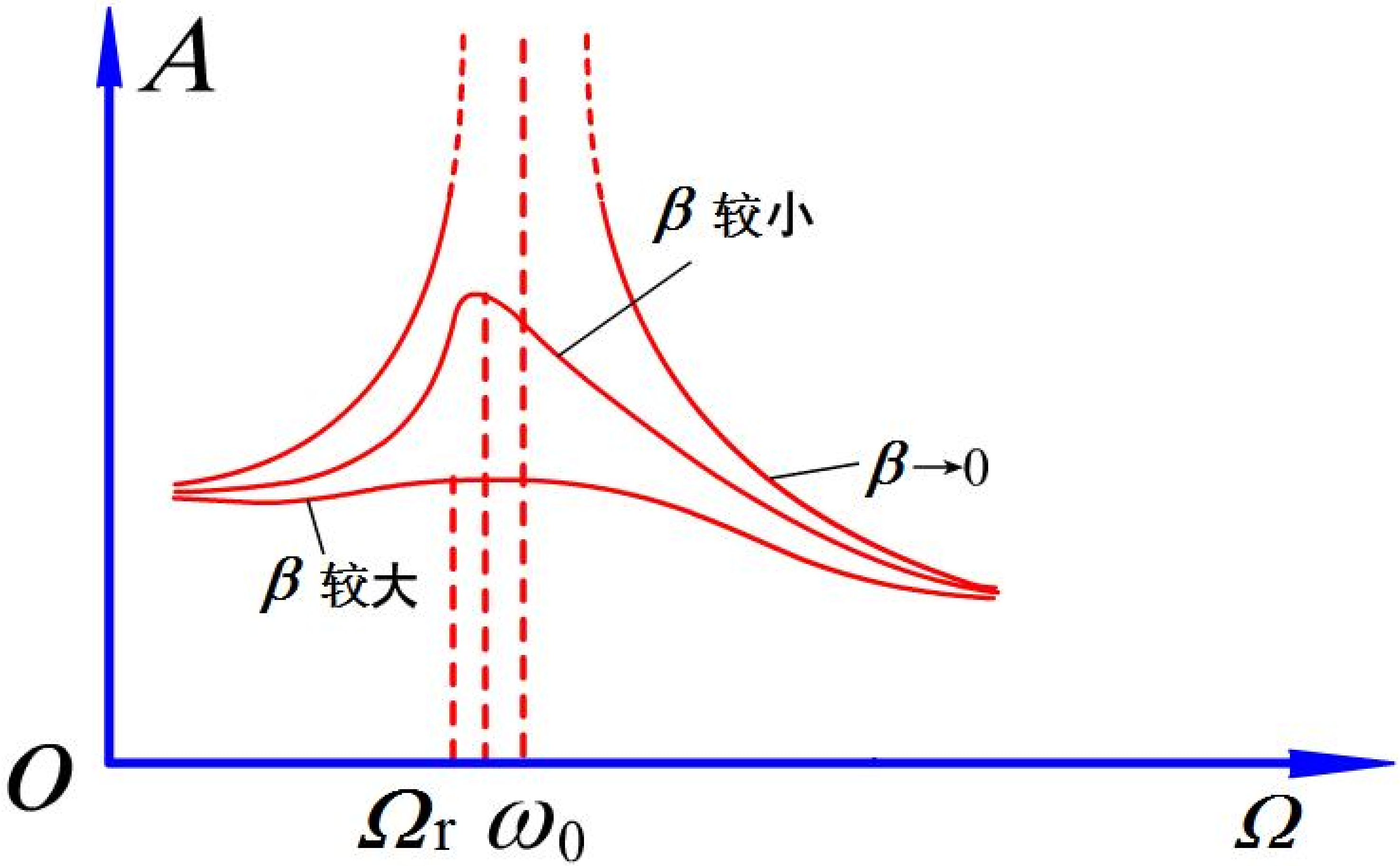
$$A_r = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

阻尼：1>2>3

（3）A_r随β的减小而增大。

$\beta = 0 : A_r \to \infty$　尖锐共振


A
β 较小
β→0
β 较大
O
Ωr ω0
Ω

3. 共振原因

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

$$\varphi = \cot\frac{-2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \cot\left(-\frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\beta}\right)$$

当阻尼系数很小时：

$$\beta \to 0 \qquad \varphi = \cot\left(-\frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\beta}\right) \to -\frac{\pi}{2}$$

$$x = A\cos(\Omega t + \varphi) = A\cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) = A\sin\Omega t$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A\Omega\cos\Omega t$$

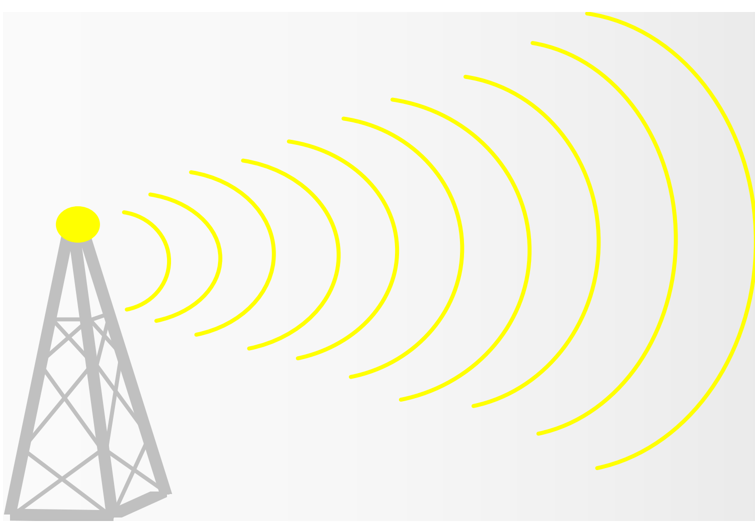
与强迫力同向：$F = F_0\cos\Omega t$

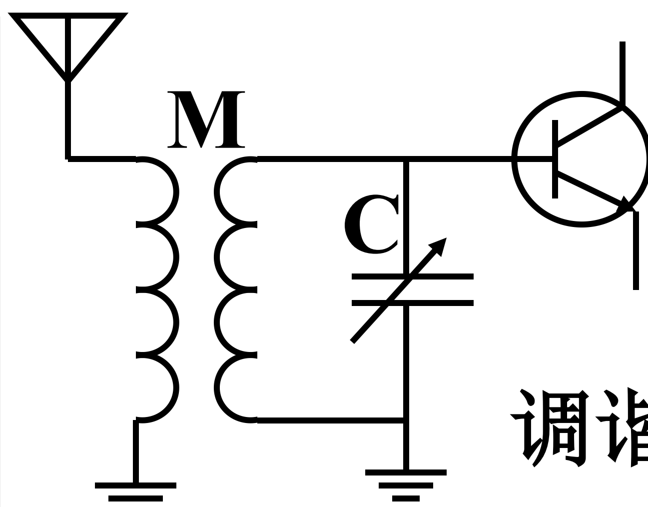
4. 共振现象的应用

（1）乐器利用共振提高音响效果。

共鸣箱

（2）无线电中利用电磁共振选择信号。





调谐电路