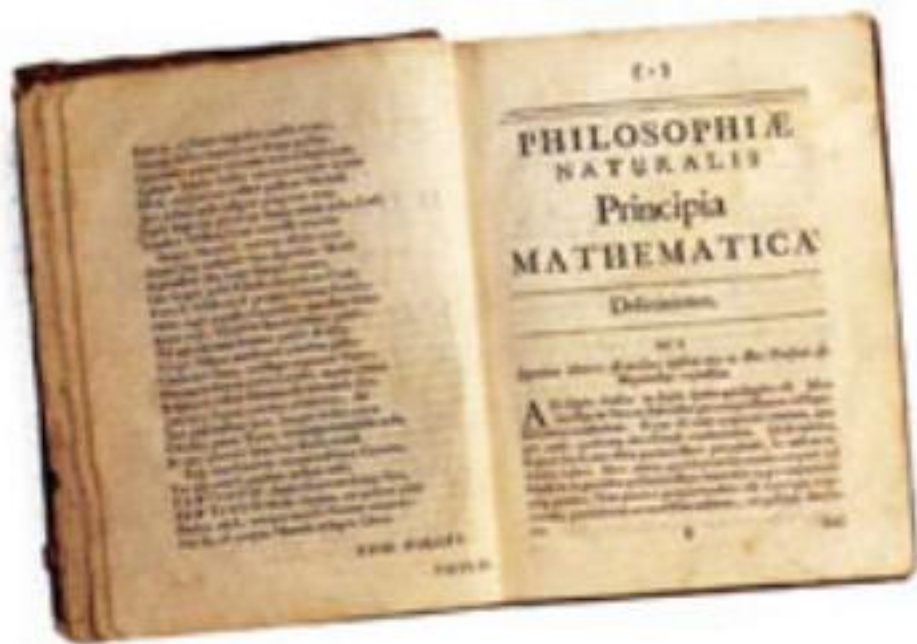


第2章 牛顿运动定律 及其应用



1687年，牛顿在他的《自然哲学的数学原理》一书中发表了牛顿运动三定律。



牛顿



§ 2.1 牛顿运动定律

一. 牛顿第一定律

任何物体都保持静止或匀速直线运动状态，直到其他物体对它的作用力迫使它改变这种状态为止。

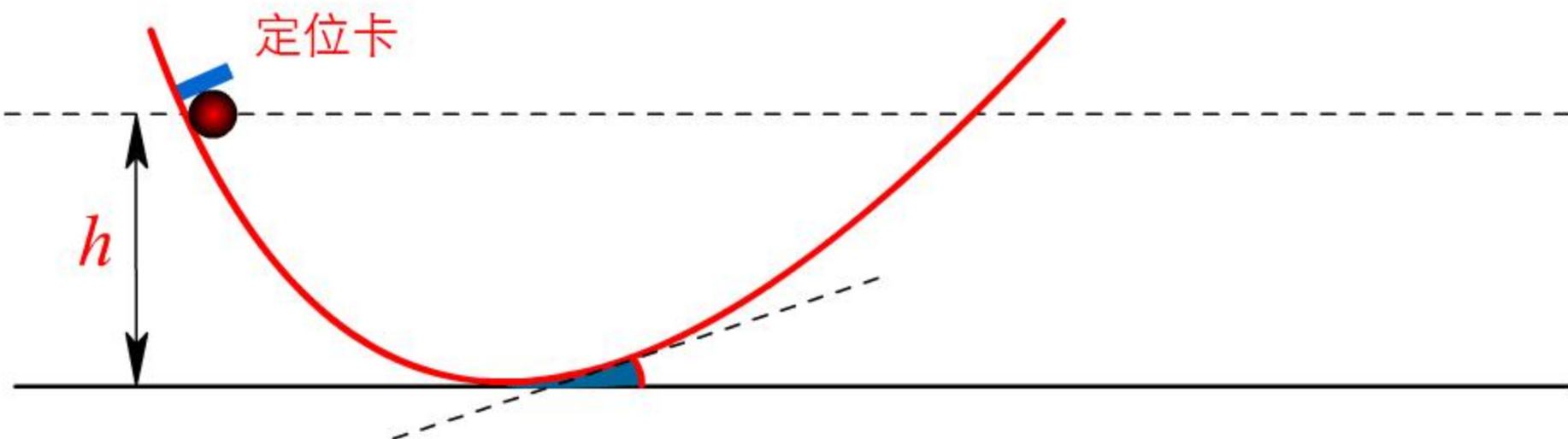
意义

(1) 说明物体具有惯性；

(2) 给出了力的确切定义：

力是一个物体对另一个物体的作用，是引起物体运动状态改变的原因。

伽利略理想实验



实验 1

实验 2

实验 3

实验 4



二. 牛顿第二定律

$$\vec{F}_{\text{合}} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \vec{v}$$

普遍形式

若 m 是常量: $\vec{F}_{\text{合}} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$

意义

- (1) 定量地说明了力的效果;
- (2) 定量地说明了质量是物体惯性大小的量度。

注意

- (1) 瞬时性:
合外力与加速度的瞬时作用关系。

(2) 矢量性：应用时常用分量式

直角坐标系

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \\ \sum F_z = ma_z \end{array} \right.$$

自然坐标系

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_\tau = ma_\tau \\ \sum F_n = ma_n \end{array} \right.$$

第二定律以实验事实为基础，在**第一定律**的基础上，进一步阐明了在力的作用下物体运动状态变化的具体规律，确定了**力、质量和加速度**之间的定量关系。是牛顿运动定律的**核心**。

三. 牛顿第三定律

任何两个物体间的作用都是相互的，分别称为作用力与反作用力。

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

意义

说明了力的**起源**是物体的相互作用。

说明

1. 作用力反作用力无主从之分、先后之分、同时产生、同时消失；
2. 作用力、反作用力总是作用在不同的物体上，不会抵消；
3. 作用力、反作用力是同性质的力。

牛顿的三条运动定律之间有着紧密联系。

第一定律和**第二定律**分别定性和定量地说明了一物体的机械运动状态的变化与其他物体对这物体的作用力之间的关系。

第三定律说明引起物体机械运动状态变化的物体间的作用力具有相互作用的性质，并指出相互作用力之间的定量关系。

第二定律侧重说明一个特定物体，**第三定律**侧重说明物体之间相互联系和相互制约的关系。



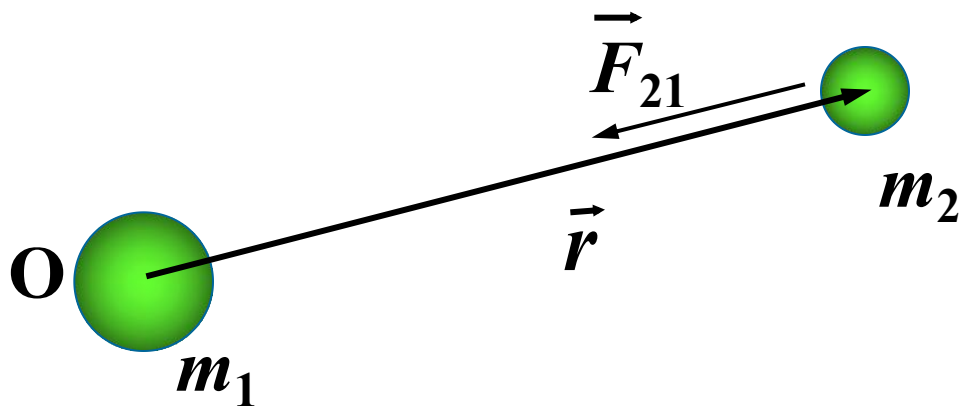
§ 2.2 力学中常见的几种力

一、万有引力

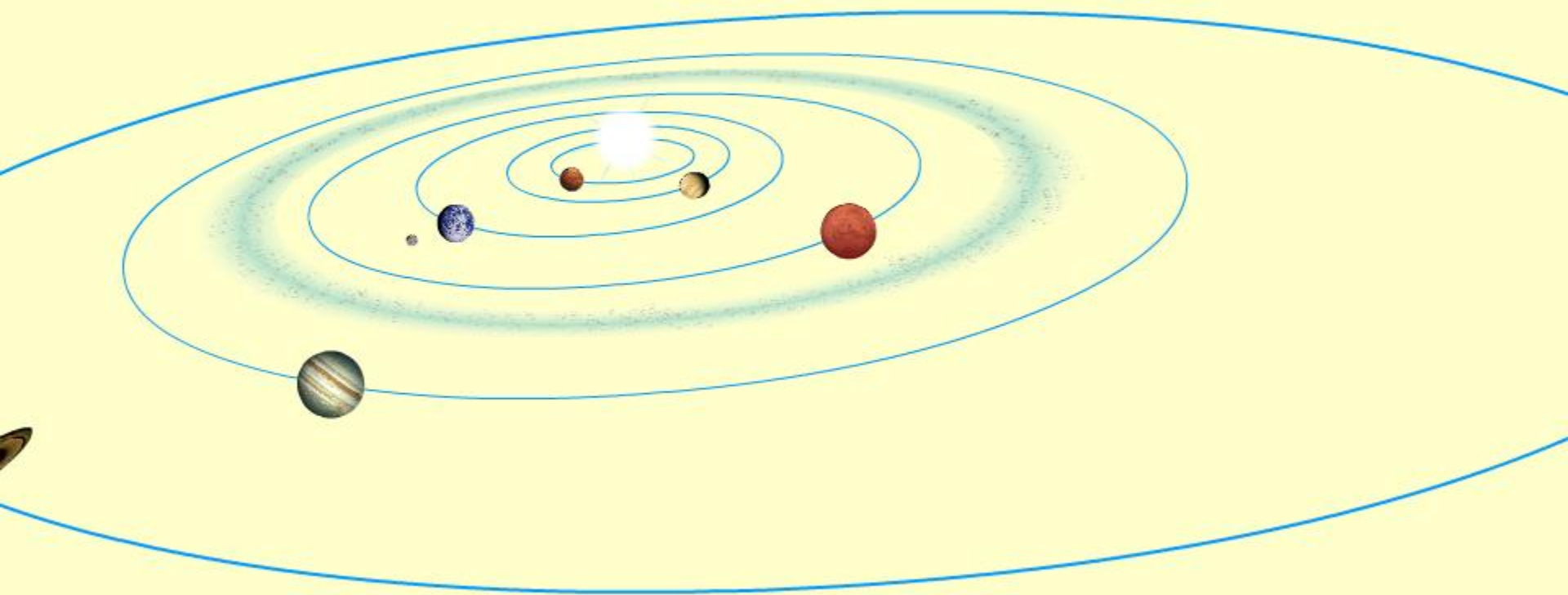
$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

引力常量

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$



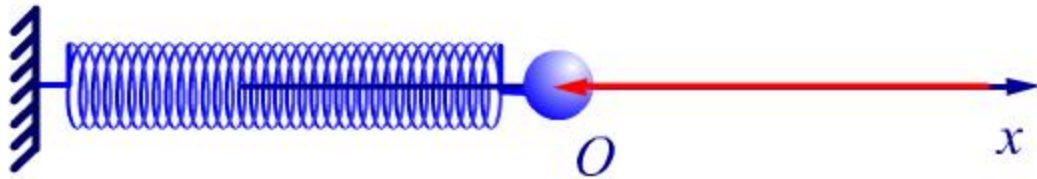
★ 重力 $P = mg$, $g = \frac{Gm_E}{R^2} \approx 9.80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$



二、弹性力（压力、张力、弹簧弹性力等）

弹簧的弹性力

$$F = -kx$$

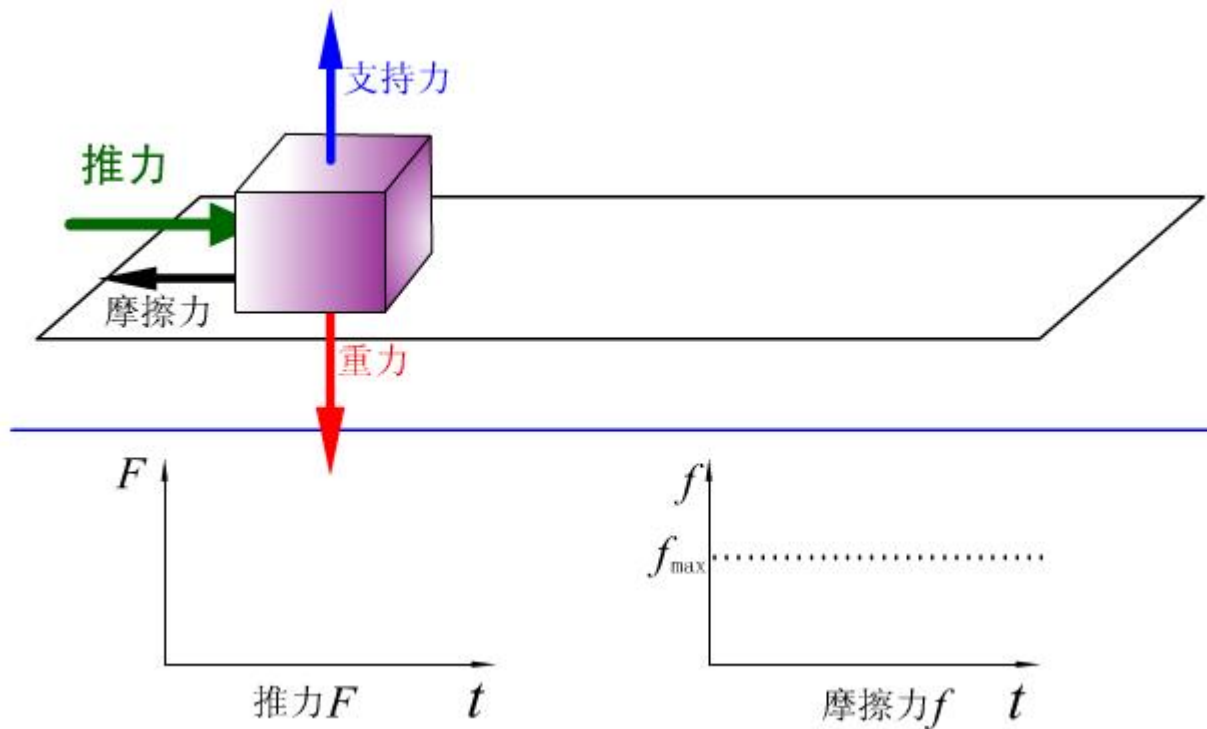


三、摩擦力

滑动摩擦力 $f_k = \mu_k N$

静摩擦力 $f \leq f_{\max}$ $f_{\max} = \mu_s N$

一般情况 $\mu_k \approx \mu_s$



§ 2.3 牛顿运动定律的应用

牛顿第一定律仅定性给出力与运动的关系。

第二定律则给出力与运动的定量关系。

说明： 1. 牛顿第二定律是力的瞬时作用规律。只适用于惯性参考系。

最为实用！

2. 牛顿第二定律微分形式的分量式

直角坐标系

$$\begin{aligned} F_x &= ma_x = m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \\ F_y &= ma_y = m \frac{dv_y}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2} \\ F_z &= ma_z = m \frac{dv_z}{dt} = m \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}$$

自然坐标系

$$\begin{aligned} \text{切向: } F_t &= ma_t = m \frac{dv}{dt} \\ \text{法向: } F_n &= ma_n = m \frac{v^2}{\rho} \end{aligned}$$

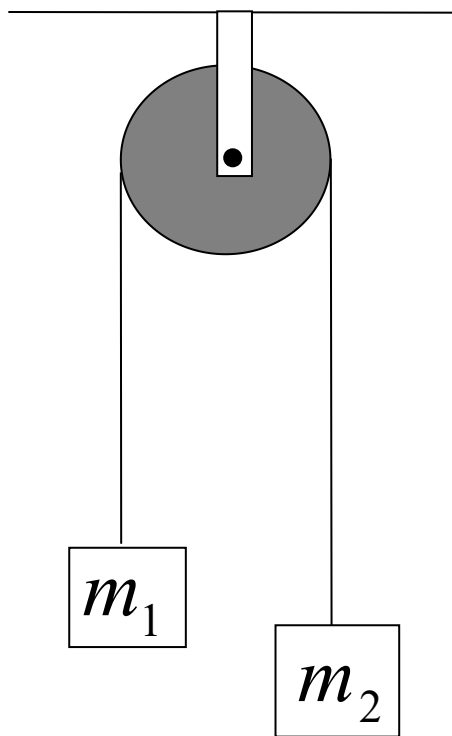


应用牛顿运动定律解题的主要方法与步骤

1. 根据问题的性质明确研究对象；
2. 分析研究对象的受力情况，画出隔离体的受力分析图；
3. 分析研究对象的运动状态（轨迹、速度、加速度）并定性判断运动状态如何变化；
4. 建立较方便的坐标系，列出牛顿第二定律的分量方程；
5. 统一各量的单位求解，并对结果作必要的分析和讨论。



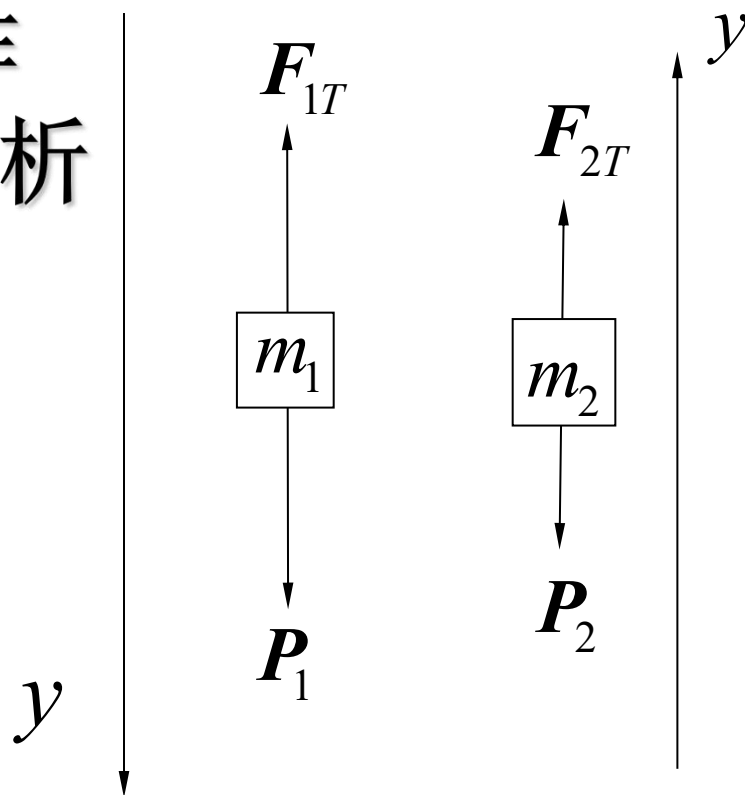
例 如图所示，一根细绳跨过定滑轮，细绳两端各挂一质量为 m_1 和 m_2 的物体，且 $m_1 > m_2$ 。若不计绳和滑轮的质量和各地的摩擦。求：物体从静止被释放后，其加速度和绳中张力。



解： 分别以两物体 m_1 m_2 作为研究对象，受力分析
列牛顿定律方程

$$m_1 g - F_T = m_1 a$$

$$F_T - m_2 g = m_2 a$$

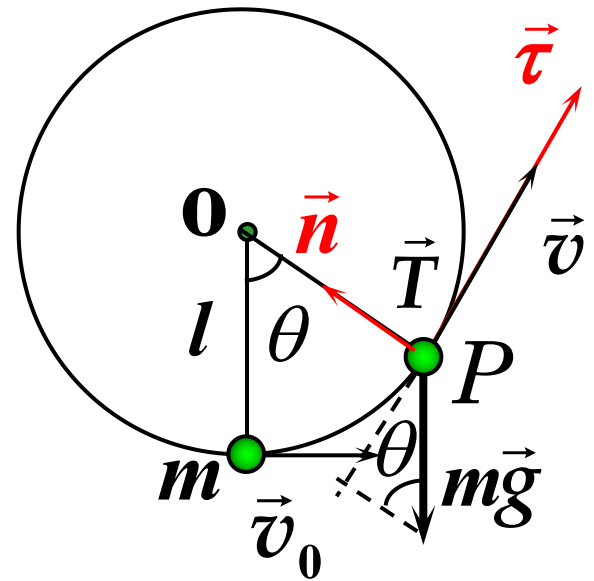


求得

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$F_T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

例：铅直平面内的圆周运动。
如图所示，长为 l 的轻绳，一端系质量为 m 的小球，另一端系于定点 O 。开始时小球处于最低位置。若使小球获得如图所示的初速 v_0 ，小球将在铅直平面内作圆周运动。求小球在任意位置的速率 v 及绳的张力 T



解：由题意知， $t = 0$ 时，小球位于最低点，速率为 v_0 。

时刻 t 时，小球位于 P 点，轻绳与铅直成 θ 角，速率为 v 。

建立自然坐标系，由牛顿第二定律：

$$F_{\tau} = ma_{\tau} = m \frac{dv}{dt} \quad F_n = ma_n = m \frac{v^2}{r}$$

有 $\begin{cases} -mg \sin \theta = ma_{\tau} = m \frac{dv}{dt} & (1) \\ T - mg \cos \theta = ma_n = m \frac{v^2}{l} & (2) \end{cases}$

得 $v = \sqrt{v_0^2 + 2gl(\cos \theta - 1)}$

$$T = m \left(\frac{v_0^2}{l} - 2g + 3g \cos \theta \right)$$





1. 当 $\theta = 0$ 时, $T_{\max} = m(\frac{v_0^2}{l} + g)$

2. 当 $\theta = \pi$ 时, $T_{\min} = m(\frac{v_0^2}{l} - 5g)$

3. 要使物体能够在竖直面内做圆周运动, 初速度必须满足下式

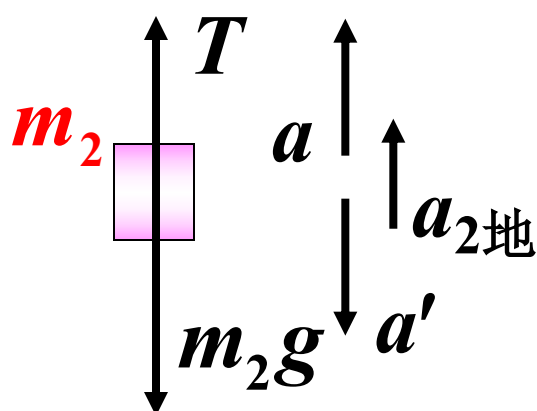
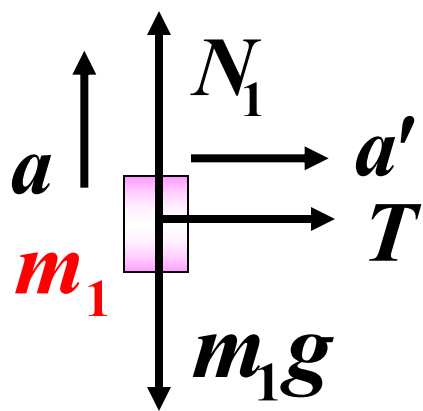
$$T_{\min} = m(\frac{v_0^2}{l} - 5g) = 0$$

即 $v_0 = \sqrt{5gl}$

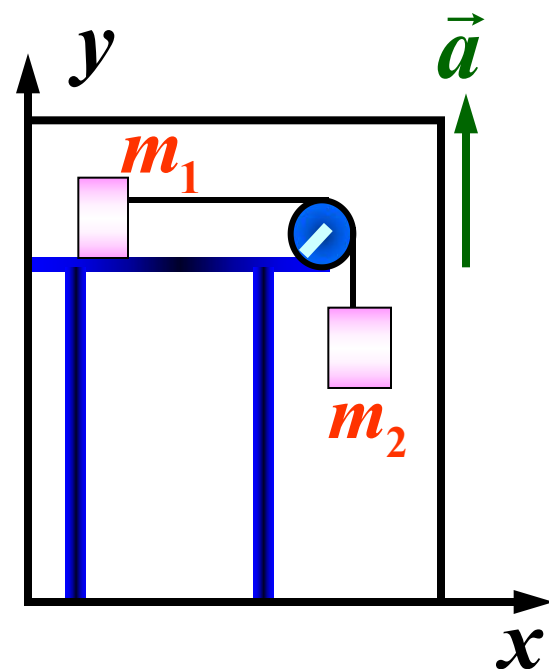
例：升降机内物体 $m_1=1\text{kg}$ ， $m_2=2\text{kg}$ ，用滑轮连接，升降机以加速度 $a = g/2$ 上升。

求： (1) 机内观察者看到两物体的加速度；
(2) 机外观察者看到两物体的加速度。

解： 以地为参考系

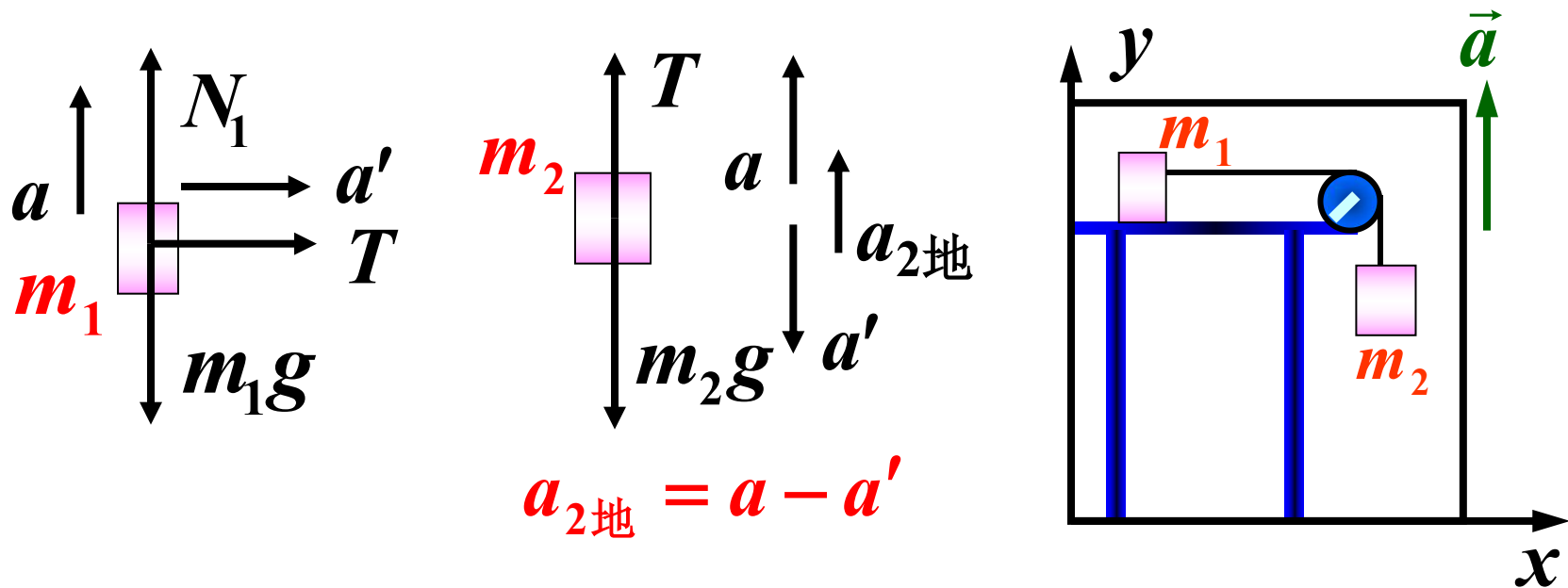


$$a_{2\text{地}} = a - a'$$



$$m_1: T = m_1 a' \quad N_1 - m_1 g = m_1 a$$

$$m_2: T - m_2 g = m_2 a_{2\text{地}} = m_2 (a - a') \quad \therefore a' = g$$



$$m_1 : \quad \vec{a}_{1机} = g\vec{i}$$

$$\vec{a}_{1地} = \vec{a}_{1机} + \vec{a} = g\vec{i} + \frac{g}{2}\vec{j}$$

$$m_2 : \quad \vec{a}_{2机} = -g\vec{j}$$

$$\vec{a}_{2地} = \vec{a}_{2机} + \vec{a} = -\frac{g}{2}\vec{j}$$

例：试证明圆柱形容器内以角速度 ω 绕中心轴作匀速旋转的流体表面为旋转抛物面。

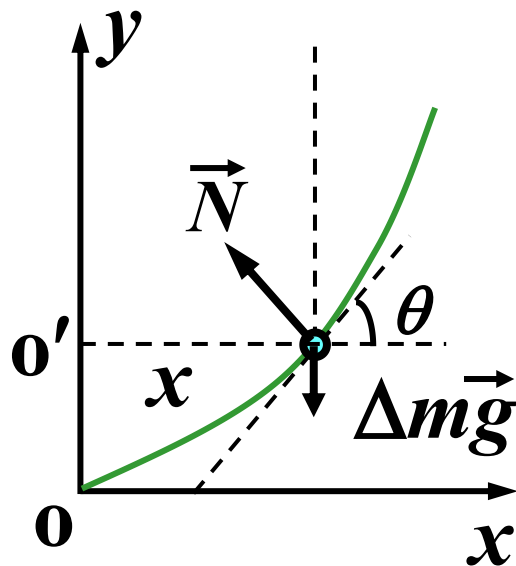
解：在流体表面任取一质量为 Δm 的质元为研究对象。 Δm 受重力和流体其他部分对它作用力的合力 N 。由于 Δm 并未沿切面流动，所以 N 的方向应垂直于该处切面，如图所示。流体绕轴旋转时， Δm 将以 O' 为圆心，以 x 为半径作匀速圆周运动。根据牛顿第二定律，有

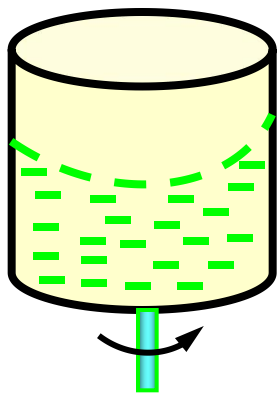
$$\Delta m \vec{g} + \vec{N} = \Delta m \vec{a}$$

分量式为

$$N \sin \theta = \Delta m x \omega^2$$

$$N \cos \theta - \Delta m g = 0$$



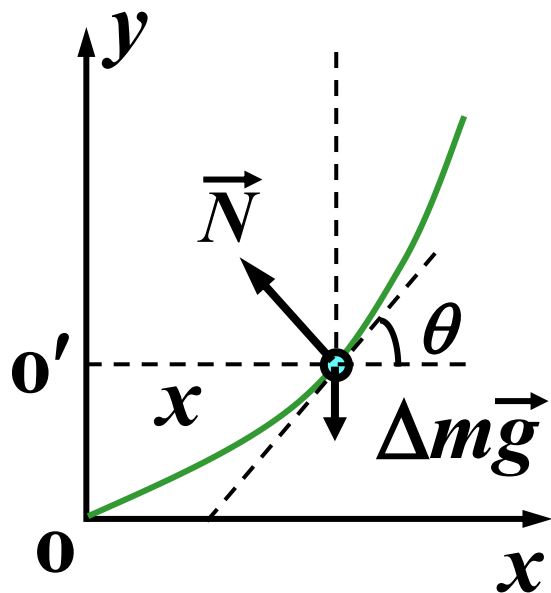


可得 $\frac{dy}{dx} = \tan \theta = \frac{\omega^2}{g} x$

将上式积分，得

$$\int_0^y dy = \frac{\omega^2}{g} \int_0^x x dx$$

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2$$



结果为抛物线方程，该曲线绕 oy 轴旋转即为旋转抛物面。

§ 2.4 物理量的单位和量纲

一、国际单位制（SI）的力学基本量和单位

量的名称	单位名称	单位符号	单 位 的 定 义
时间	秒	s	^{138}Cs 原子某特征频率光波周期的 9 192 631 770 倍
长度	米	m	光在真空中在 $(1/299\,792\,458)\text{ s}$ 内所经过的距离
质量	千克	kg	保存在巴黎度量衡局的“kg标准 原器”的质量



二、量纲

基本量以外的其他量和单位都可根据一定的关系式由基本量及其单位导出，分别称为导出量和导出单位。

为定性表示导出量和基本量间的关系，常不考虑关系式中的数字因数，而将物理量用若干基本量的乘方之积表示，这样的式子称为该物理量的量纲式，简称量纲。某物理量 Q 的量纲通常表示为 $[Q]$ 。

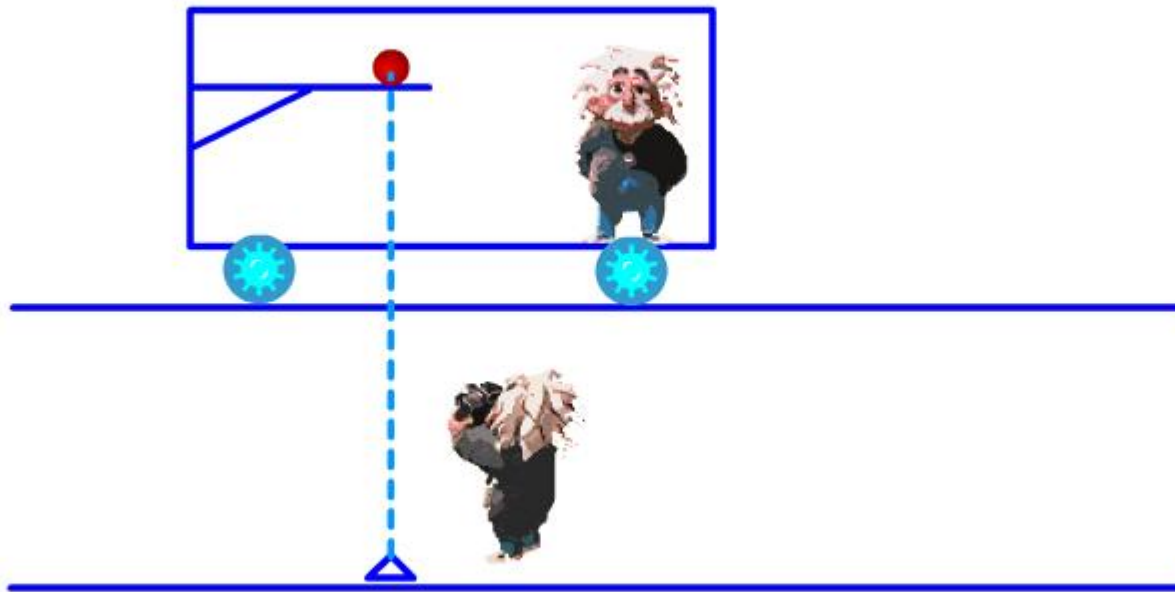
在SI中，基本力学量是长度、质量、时间，它们的量纲分别用 L 、 M 、 T 表示。这样，导出量如速度 v 和力 F 的量纲就分别为 $[v] = LT^{-1}$ 和 $[F] = MLT^{-2}$ 。

只有量纲相同的项才能进行加减或用等式联接。

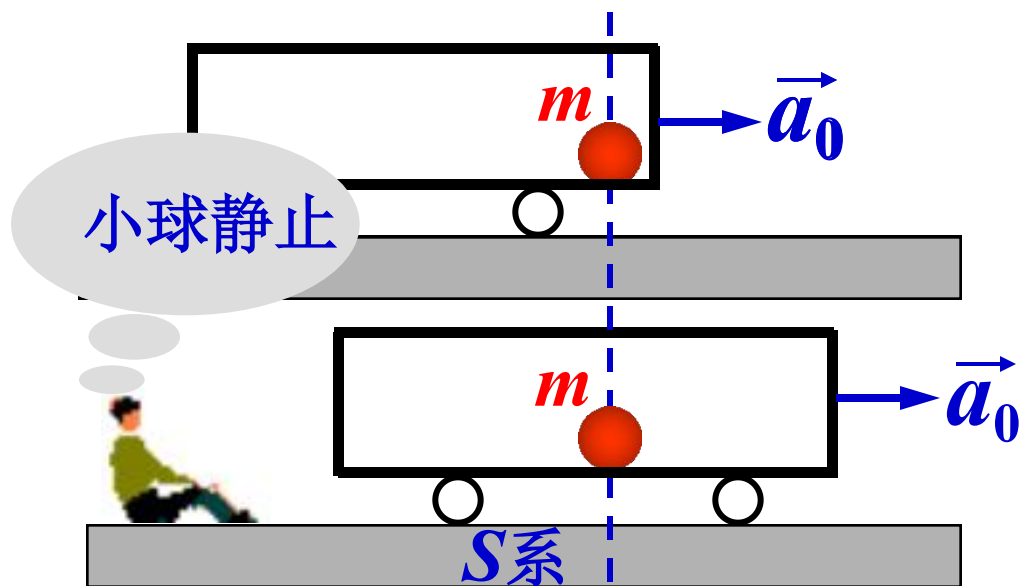


* § 2.5 非惯性系 惯性力

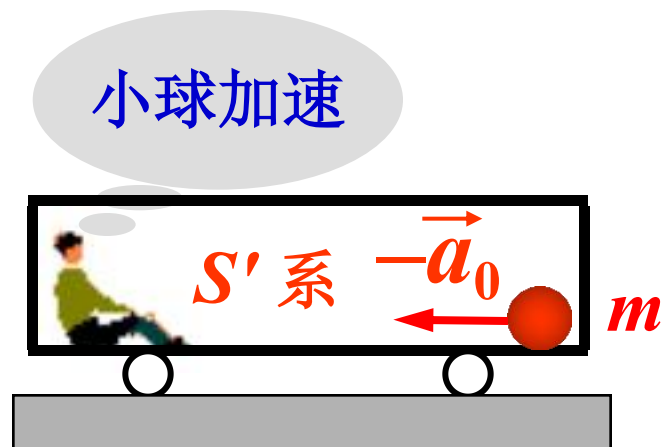
非惯性系包括：平动加速系、转动系



一、平动加速系中的惯性力



水平方向小球不受力
惯性系，牛顿定律成立。



小车是非惯性系
牛顿定律不成立！

若用牛顿定律思考，则必认为小球受力为 $-m\vec{a}_0$

设 S' 系相对惯性系 S 以加速度 \vec{a}_0 平动。在 S 系中牛顿第二定律成立 $\vec{F} = m\vec{a}$

\vec{F} — 真实力, \vec{a} — 质点的加速度。

在 S' 系（非惯性系）中设质点的加速度为 \vec{a}'

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$$

代入 $\vec{F} = m\vec{a}$ 中得 $\vec{F} + (-m\vec{a}_0) = m\vec{a}'$, 即 S'

系中形式上的牛顿第二定律:

$$\vec{F} + \vec{F}_i = m\vec{a}'$$

$$\boxed{\vec{F}_i = -m\vec{a}_0} \text{ — 惯性力}$$



质点所受惯性力的大小，等于质点的质量和此非惯性系整体相对惯性系的加速度的乘积，方向与此加速度的方向相反

$$\vec{F}_i = -m \vec{a}_0$$

1. 惯性力与质点的位置无关，各处均匀。
2. 牛顿力学认为惯性力是“假想力”，不是物体间的相互作用，没有反作用力。
惯性力有真实的效果。

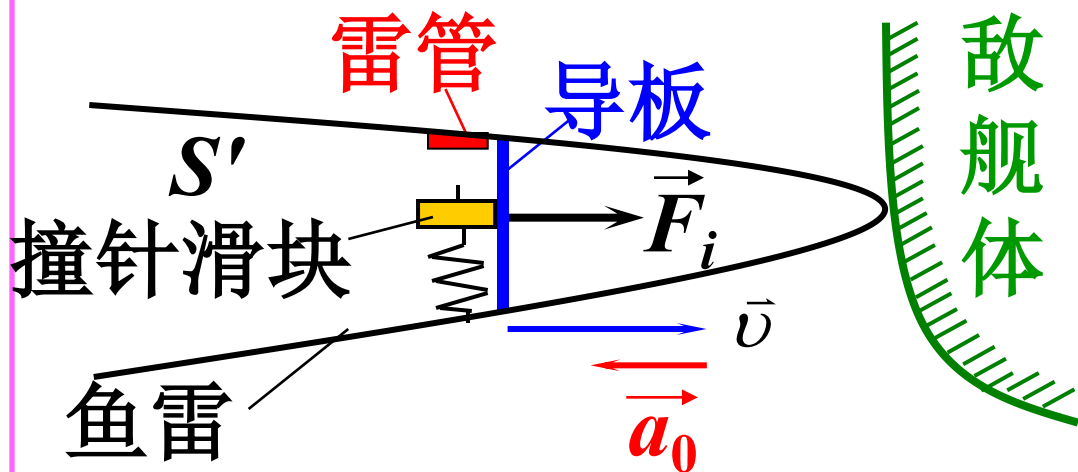
美 **Tinosa**号潜艇携带**16**枚鱼雷在太平洋离敌舰
4000码斜向攻击发射**4**枚**使敌舰停航**，离敌舰
875码垂直攻击发射**11**枚**均未爆炸**！

分析：

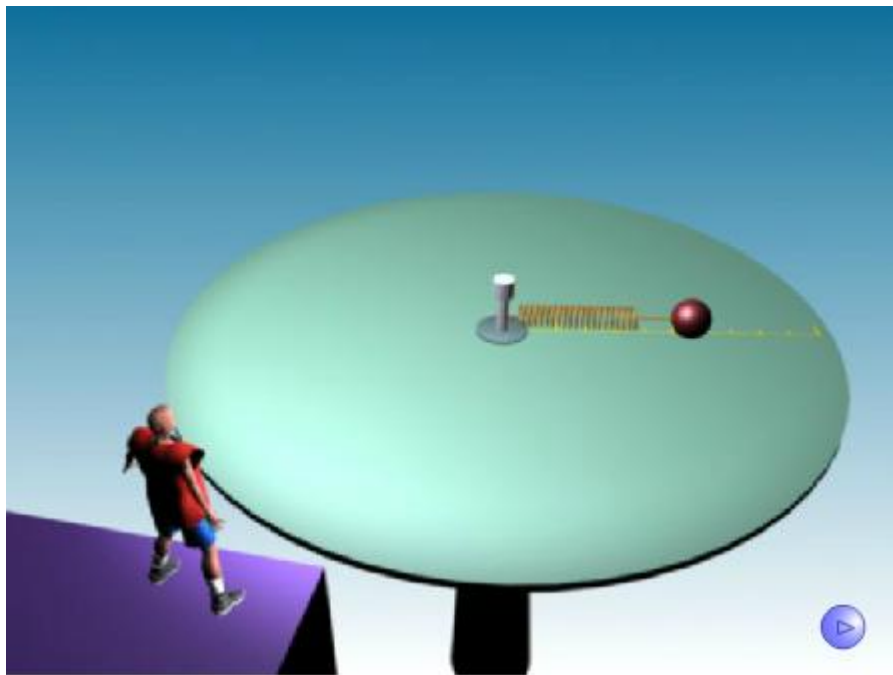
您
能
改
进
吗？



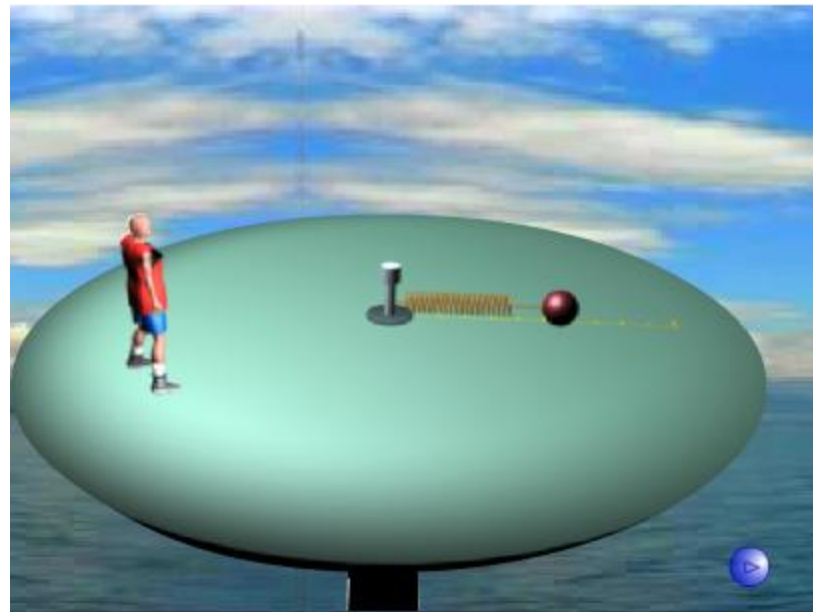
垂直、近距
→ 惯性力大
→ 摩擦力大



二、转动系中的惯性力

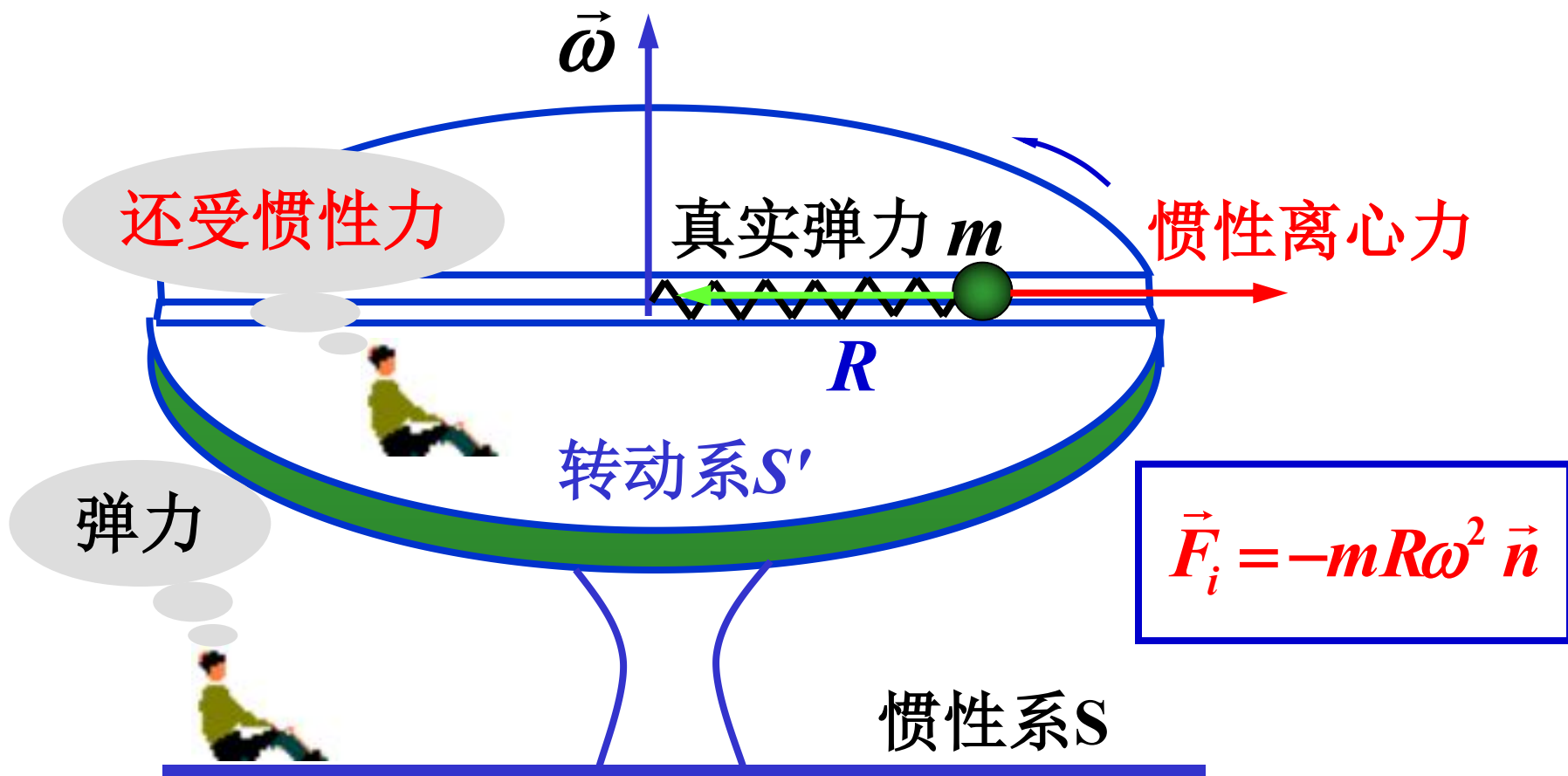


地面上的观察者看到弹簧被拉长,小球与转台一起转动,符合牛顿第二定律.



转台上的 观察者看到弹簧被拉长,小球却相对转台静止,不符合牛顿第二定律.

设圆盘匀速转动，物体 m 相对圆盘静止



这时，惯性力只是惯性离心力。

匀角速转动系中静止的物体

地面参考系: $\vec{F} = m\vec{a}_n$

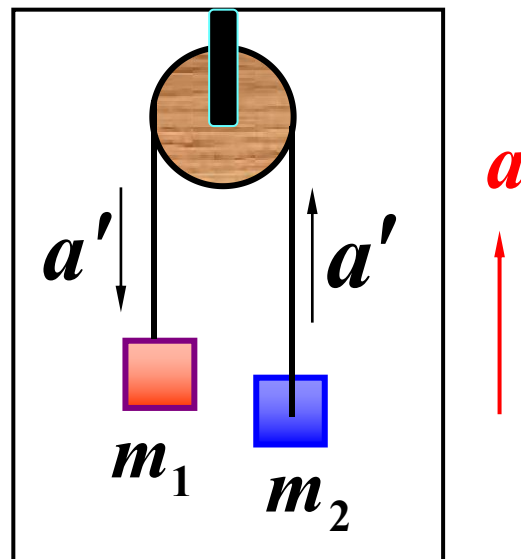
转盘参照系: $\vec{F} + \vec{F}_i = 0$

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}_n = -mR\omega^2\vec{n}$$

惯性离心力



例：设电梯相对地面以加速度 a 上升，电梯中有一质量可忽略不计的滑轮，在滑轮的两侧用轻绳挂着质量为 m_1 和 m_2 的重物，已知 $m_1 > m_2$ ，如图所示，求两物体相对电梯的加速度和绳的张力。



解： 以电梯为参考系

设两物体相对于电梯
的加速度为 a'

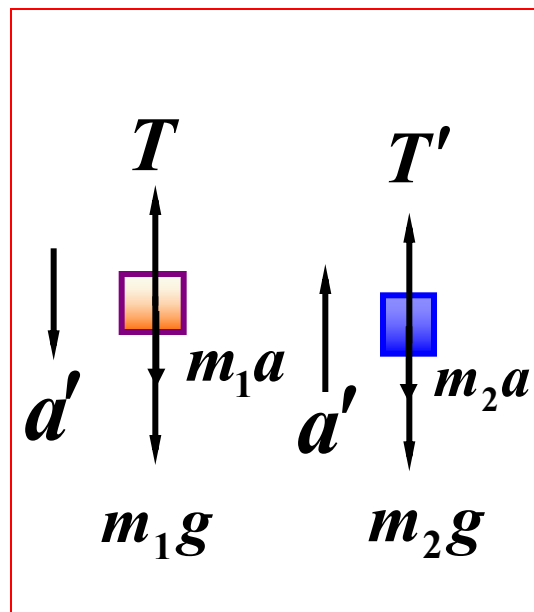
$$m_1g + m_1a - T = m_1a'$$

$$T' - m_2g - m_2a = m_2a'$$

$$T' = T$$

三式联立求解，可得

$$a' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(g + a) \quad T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}(g + a)$$



▲ 重力和纬度的关系：



由于地球自转，地面物体会受到惯性离心力的作用。
重力并非地球引力，而是引力和惯性离心力的合力。

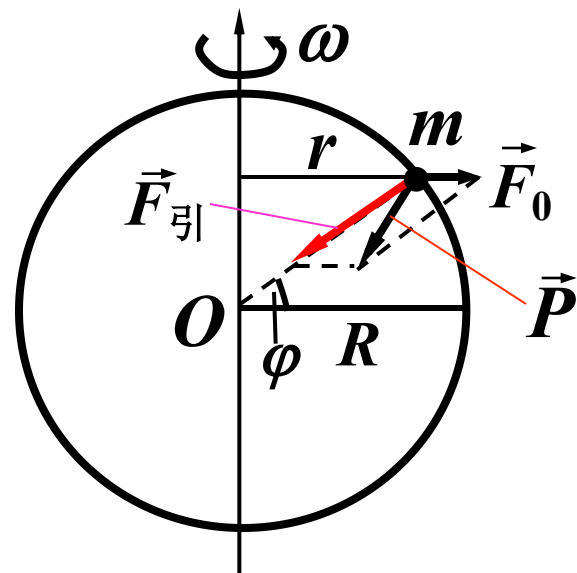
重力加速度 g 和地球纬度 φ 的
关系式为（自己推导）：

$$g \approx g_0 \left(1 - \frac{a_0}{g_0} \cos^2 \varphi \right)$$

式中： $g_0 = \frac{GM_e}{R^2} \approx 9.83 \text{ms}^{-2}$, $a_0 = R\omega^2 \approx 0.034 \text{ms}^{-2}$

G —万有引力常量， M_e —地球质量，

R —地球半径， ω —地球自转角速度。



$$\vec{P} = m\vec{g} + \vec{F}_0$$

$$F_0 = m\omega^2 r = m\omega^2 R \cos \varphi$$

$$P \approx mg_0 - F_0 \cos \varphi = mg_0 - m\omega^2 R \cos^2 \varphi$$

$$P = mg \approx mg_0 \left(1 - \frac{\omega^2 R}{g_0} \cos^2 \varphi\right)$$

$$g \approx g_0 \left(1 - \frac{a_0}{g_0} \cos^2 \varphi\right)$$

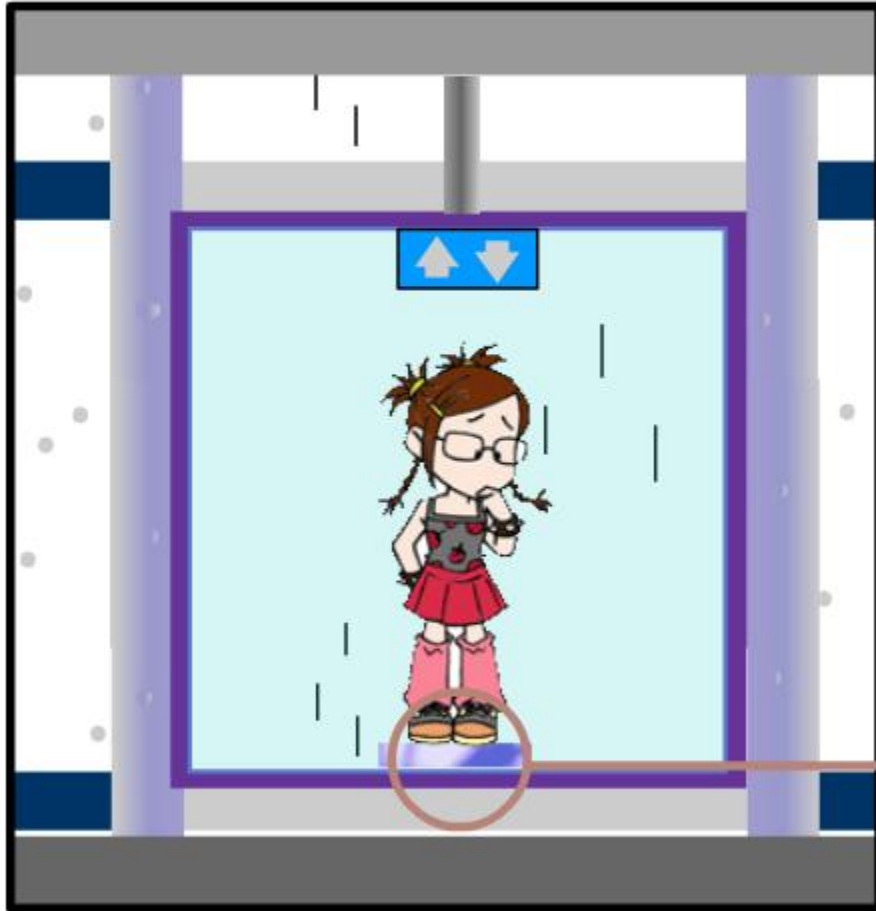
$$g_0 = \frac{GM_e}{R^2} \approx 9.83 \text{ms}^{-2}, \quad a_0 = R\omega^2 \approx 0.034 \text{ms}^{-2}$$



▲ 失重问题

在太空中自由降落的升降机或绕地球自由飞行的飞船均可以视为**平动的非惯性系**（有地球引力引起的指向地心的加速度），其中物体所受的引力被惯性离心力完全抵消而出现失重。在那里物体可以真正做到“不受力”。所以在这样的**非惯性系**中，反而能够真正做到验证惯性定律。







在飞船中几个球可以在空中摆成一个圈