

第3章 动量守恒定律和 能量守恒定律



§ 3.1 冲量 动量定理

一、冲量 力对时间的积累

1. 恒力的冲量 $\vec{I} = \vec{F}\Delta t$

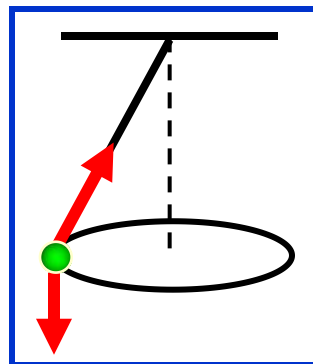
2. 变力的冲量

$$dt : d\vec{I} = \vec{F} dt$$

$$\Delta t: \vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

矢量：恒力 \vec{I} 与 \vec{F} 方向相同

变力 由 $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$ 方向决定



二、质点的动量定理

$$\vec{F}dt = \frac{d(m\vec{v})}{dt}dt = d(m\vec{v}) \quad \text{动量 } \vec{p} = m\vec{v}$$

$$\therefore \vec{F}dt = d\vec{p} \quad \text{— 微分形式}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} d\vec{p}$$

$$\therefore \vec{I} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \quad \text{— 积分形式}$$

说明

(1) 分量式 $I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = mv_{2x} - mv_{1x}$

$$I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = mv_{2y} - mv_{1y}$$

$$I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt = mv_{2z} - mv_{1z}$$



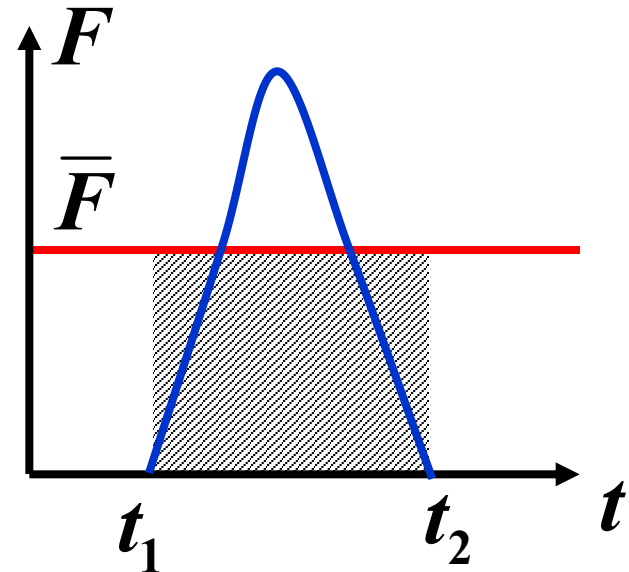
(2) 动量定理给出了另一种求冲量的方法:

大小: $|\vec{I}| = |\vec{p}_2 - \vec{p}_1|$ 等于动量增量的大小

方向: 与动量增量的方向相同

(3) 平均冲力:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{平}} &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \cdot dt \\ &= \frac{\vec{I}}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{\Delta t}\end{aligned}$$



(4) 动量定理只适用于惯性系。

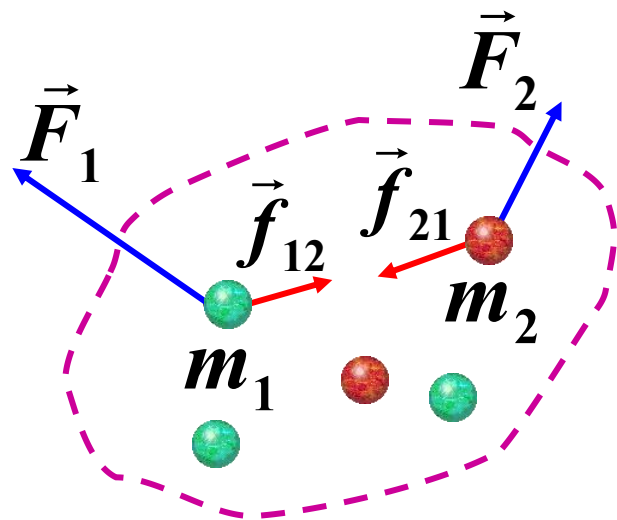
三、质点系的动量定理

内力的冲量和等于零

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \cdots + \vec{F}_n) dt = d\vec{p}$$

$$\sum \vec{F}_i dt = d\vec{p} \text{ — 微分形式}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{I}_i = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \text{ — 积分形式}$$



说明

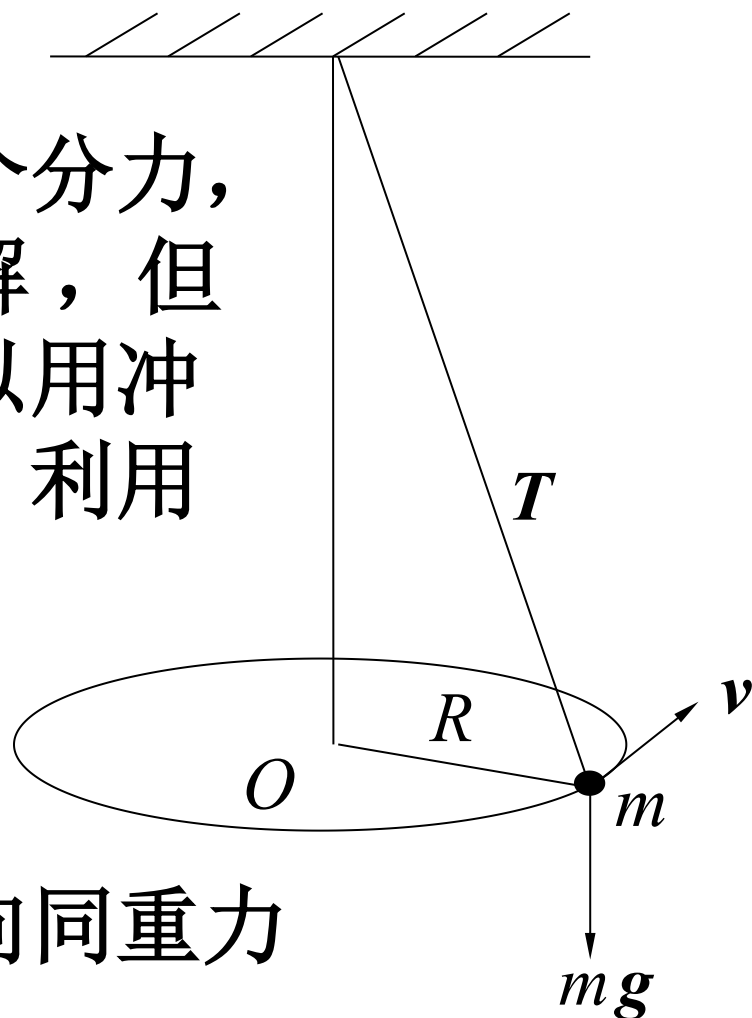
- (1) 外力的冲量改变质点系的动量;
- (2) 内力可改变个别质点的动量, 但不改变质点系的总动量。

例：如图所示，一圆锥摆系统中，小球质量为，以速率作半径为的圆周运动。求：（1）小球运动一周，受到重力的冲量；（2）小球运动半周，受到合外力的冲量。

解：重力只是小球受到的一个分力，因此，不可以用动量定理求解，但因为重力是恒力，所以，可以用冲量的定义直接求重力的冲量。利用恒力冲量定义：

$$I_g = mg\Delta t = mg \frac{2\pi R}{v}$$

其大小为 $I_g = \frac{2\pi Rmg}{v}$ 方向同重力



§ 3.2 动量守恒定律

一、动量守恒定律

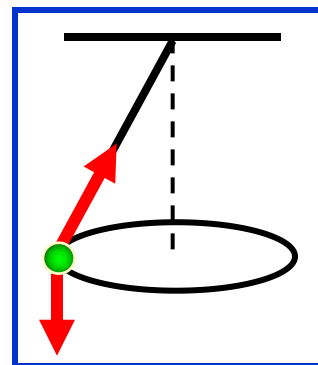
$$(\sum \vec{F}_i) dt = d\vec{p}$$

若 $\sum \vec{F}_i = 0 : \vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i = \text{恒矢量}$

质点系所受的合外力为零时，质点系的总动量守恒。

说明

(1) 守恒的条件： $\vec{F}_{\text{合力}} = 0$
不是合冲量为零



(2) 常用分量式:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum m_i v_{ix} = \text{恒量}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \sum m_i v_{iy} = \text{恒量}$$

$$\sum F_z = 0 \quad \sum m_i v_{iz} = \text{恒量}$$

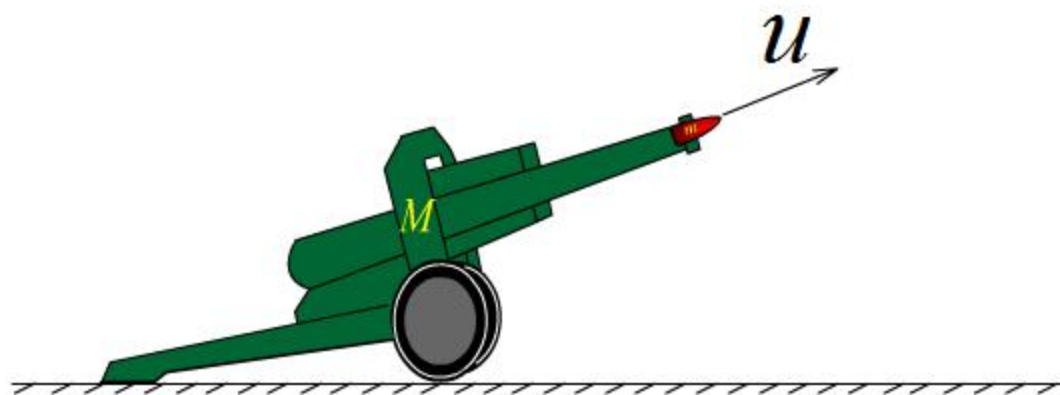
若某一方向上合外力为零, 在该方向上动量守恒。

(3) 若系统内力远大于外力 (如碰撞、打击、爆炸等), 可近似认为动量守恒。

(4) 是自然界的普适规律之一。

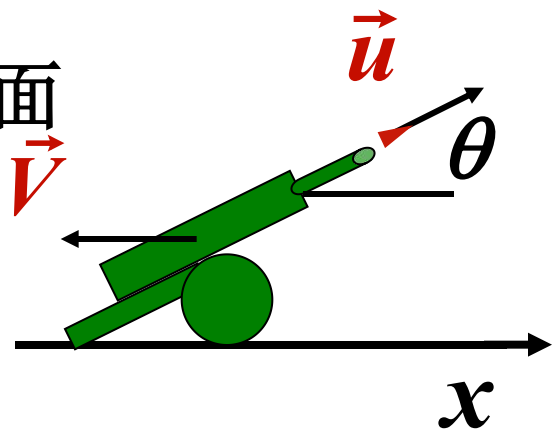
例：如图所示，一辆停在水平地面上的炮车以仰角 θ 发射一颗炮弹，炮弹的出膛速度相对于炮车为 u ，炮车和炮弹的质量分别为 M 和 m 。忽略地面的摩擦，试求：

- (1) 炮车的反冲速度；
- (2) 若炮筒长为 l ，则在发射炮弹的过程中炮车移动的距离为多少？



动画演示

解：（1）以炮弹和炮车为系统，选地面为参考系。系统在水平方向动量守恒。



炮车对地速度： \vec{V}

炮弹对地速度： $\vec{v} = \vec{u} + \vec{V}$ $v_x = u \cos \theta + V$

由x方向动量守恒：

$$MV + mv_x = 0 \qquad \therefore V = -\frac{m \cos \theta}{m + M} u$$

$$(2) \quad \int_0^t V dt = -\frac{m \cos \theta}{m + M} \int_0^t u dt \qquad \Delta x = -\frac{m \cos \theta}{m + M} l$$

* § 3.3 质心 质心运动定理

一、质心

由质点系的动量定理 $(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i)dt = d\vec{p}$

$$\begin{aligned} \rightarrow (\sum_{i=1}^n \vec{F}_i) &= \frac{d(\sum_{i=1}^n \vec{p}_i)}{dt} = \frac{d\sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i)}{dt} = m \frac{d^2(\frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m})}{dt^2} \\ &= m \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} \quad \text{定义: } \vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m} \quad (m = \sum m_i) \end{aligned}$$

有了质心概念，就可以将质点系再次抽象为质点，质心是质点系平动状态的代表点。

质点系的质心

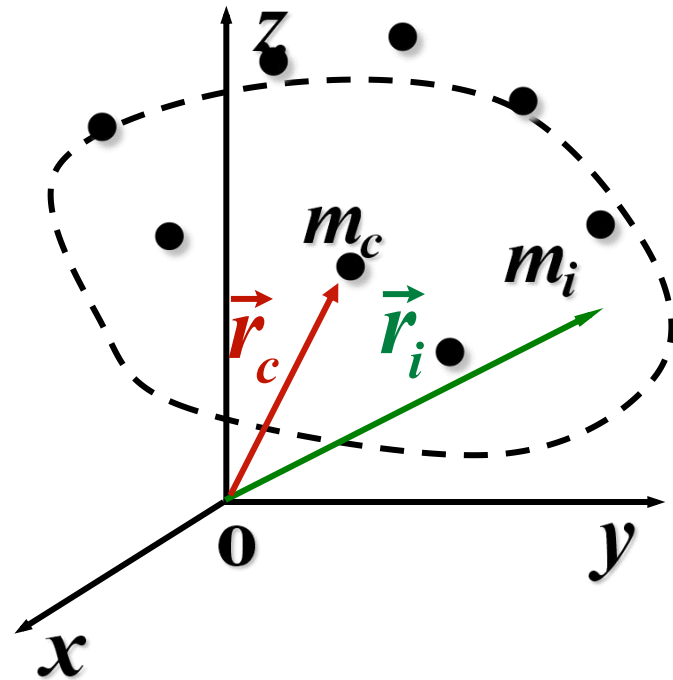
$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i^n m \vec{r}_i}{m}$$

$$= \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

$$x_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{m}$$

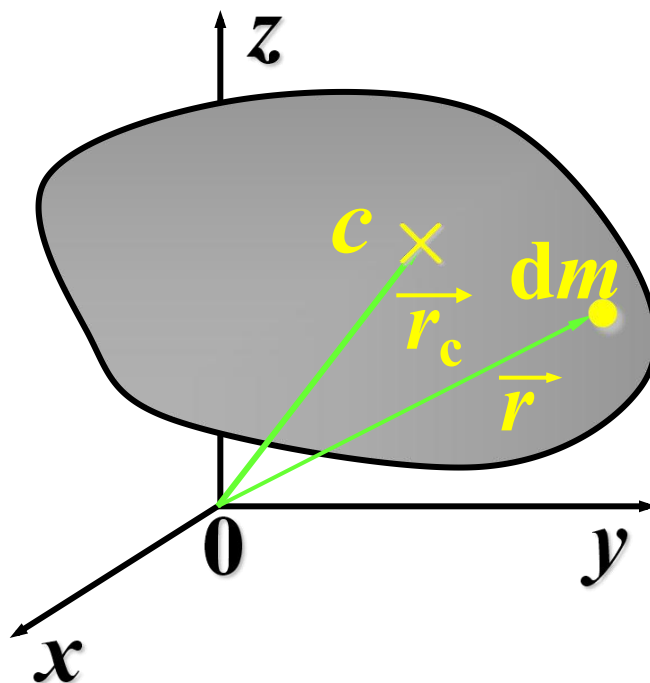
$$y_c = \frac{\sum_i m_i y_i}{m}$$

$$z_c = \frac{\sum_i m_i z_i}{m}$$



连续体的质心

$$\left\{ \begin{array}{l} x_c = \frac{\int x dm}{m} \\ y_c = \frac{\int y dm}{m} \\ z_c = \frac{\int z dm}{m} \end{array} \right.$$

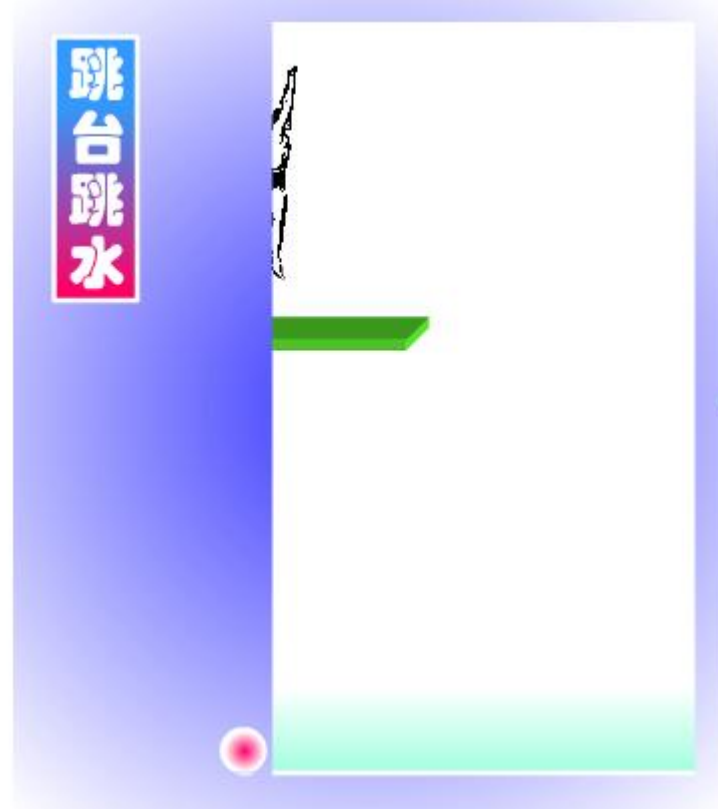


$$\vec{r}_c = \frac{\int \vec{r} dm}{m}$$

质心的位置矢量与参考系选取有关；但可证明，对不变形的物体，质心相对自身的位置不变，与参考系的选取无关。

二、质心运动定理

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = m \vec{a}_c$$



质点系可以抽象为一个质点，其质量为质点系的总质量；它所受到的外力是质点系所有外力的矢量和，并且等于总质量与质心加速度的乘积。

质心的速度

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum_i^n m_i \vec{r}_i}{m} \right) = \frac{1}{m} \left(\sum_i^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \frac{\sum_i^n m_i \vec{v}_i}{m}$$

$$\vec{p} = \sum_i^n \vec{p}_i = \sum_i^n m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_c = \vec{p}_c$$

当质点系不受外力，或所受外力的矢量和为零时，系统的质心保持静止或匀速直线运动。



§ 3.4 质量流动与火箭飞行原理

火箭发射



低速 ($v \ll c$) 情况下的两类变质量问题:

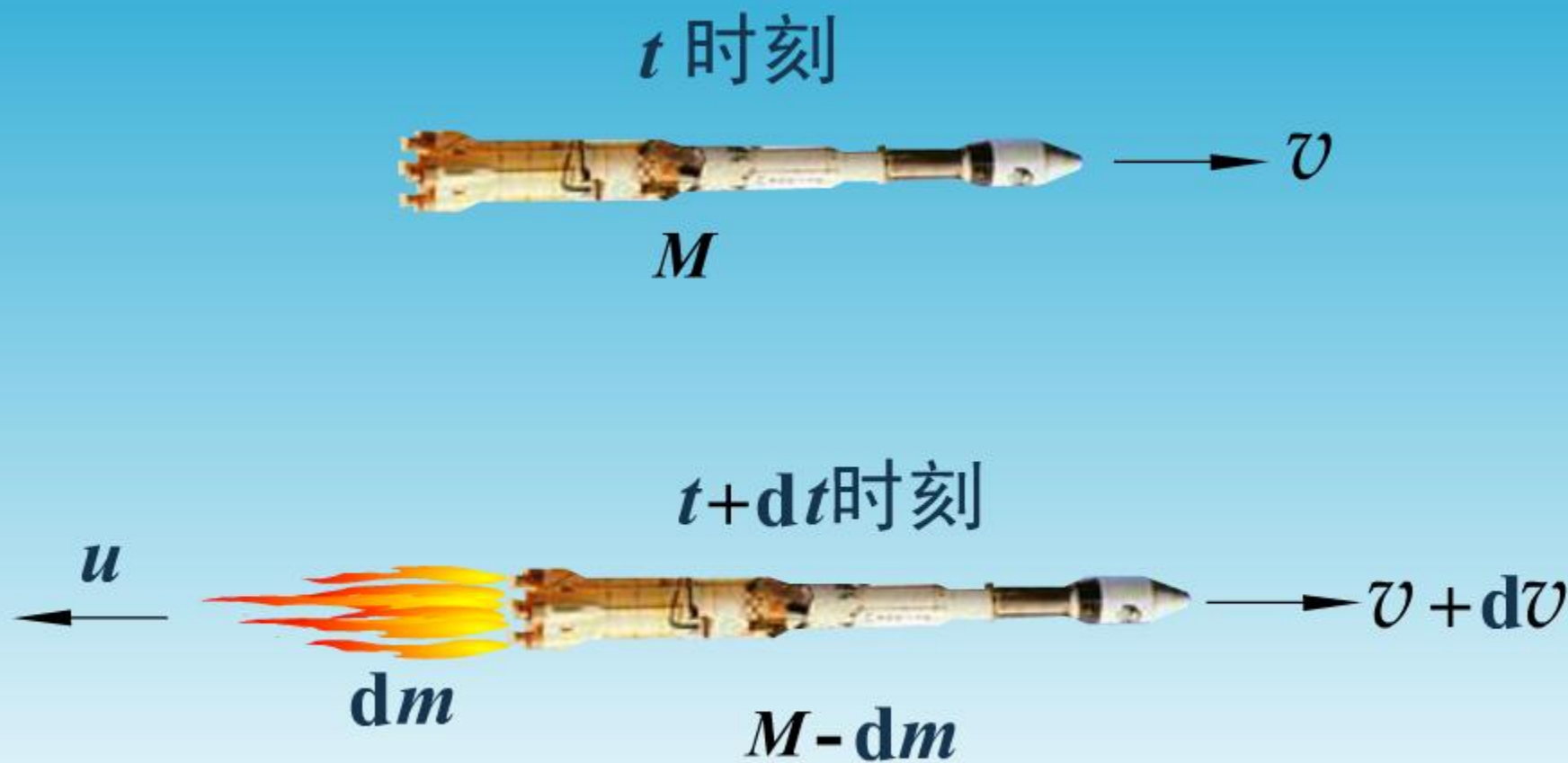
- ▲ 粘附 — 主体的质量增加 (如滚雪球)
- ▲ 抛射 — 主体的质量减少 (如火箭发射)

还有另一类变质量问题是在高速 ($v \sim c$) 情况下, 这时即使没有粘附和抛射, 质量也可以随速度改变 — $m = m(v)$, 这是相对论情形, 不在本节讨论之列。

下面仅以火箭飞行为例, 讨论变质量问题。



一、火箭不受外力情形（在自由空间飞行）



1. 火箭的速度

系统： 火箭壳体 + 尚存燃料

条件： 燃料相对箭体以恒速 u 喷出

总体过程： i (点火) $\rightarrow f$ (燃料烧尽)

先分析一微过程： $t \rightarrow t + dt$

初态： 系统质量 M ，速度 v (对地)，动量 Mv

末态： 喷出燃料后

喷出燃料的质量： $dm = -dM$,

喷出燃料速度(对地)： $v - u$



火箭壳体 + 尚存燃料的质量: $M - dm$

火箭壳体 + 尚存燃料的速度(对地): $v + dv$

系统动量: $(M - dm)(v + dv) + [-dM(v - u)]$

由动量守恒, 有

$$Mv = -dM(v - u) + (M - dm)(v + dv)$$

经整理得: $Mdv = -u dM$

$$\longrightarrow dv = -u \frac{dM}{M} \longrightarrow \int_i^f dv = -u \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}$$

速度公式: $v_f = v_i + u \ln \frac{M_i}{M_f}$



引入火箭质量比: $N = \frac{M_i}{M_f}$

$$v_f = v_i + u \ln N$$

讨论

提高 v_f 的途径

(1) 提高 u (现可达 $u = 4.1 \text{ km/s}$)

(2) 增大 N (受一定限制)

为提高 N , 采用多级火箭 (一般为三级)

$$v = u_1 \ln N_1 + u_2 \ln N_2 + u_3 \ln N_3$$

2. 火箭所受的反推力

研究对象： 喷出气体 dm

t 时刻： 速度 v (和主体速度相同), 动量 vdm

$t + dt$ 时刻： 速度 $v - u$, 动量 $dm(v - u)$

由动量定理, dt 内喷出气体所受冲量

$$F_{\text{箭对气}} dt = dm(v - u) - vdm = -F_{\text{气对箭}} dt$$

由此得火箭所受燃气的反推力为

$$F = F_{\text{气对箭}} = u \frac{dm}{dt}$$

忽略地面附近重力加速度 g 的变化，由动量定理，有

$$-Mgdt = -dM(v-u) + (M-dm)(v+dv) - Mv$$

经整理得： $-Mgdt = Mdv + u dM$

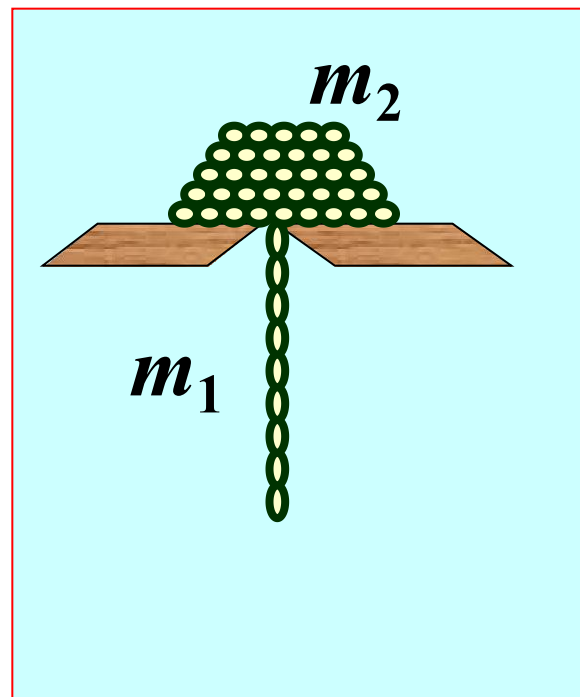
$$\int_i^f dv = -\int_0^t g dt - u \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}$$

$$v(t) = v_i - gt + u \ln \frac{M_i}{M_t}$$

M_t ： t 时刻火箭壳和尚余燃料的质量



例:一柔软链条长为 l ，单位长度的质量为 λ ，链条放在有一小孔的桌上，链条一端由小孔稍伸下，其余部分堆在小孔周围。由于某种扰动，链条因自身重量开始下落。



求链条下落速度 v 与 y 之间的关系。设各处摩擦均不计，且认为链条软得可以自由伸开。

解：以竖直悬挂的链条和桌面上的链条为一系统，建立坐标系

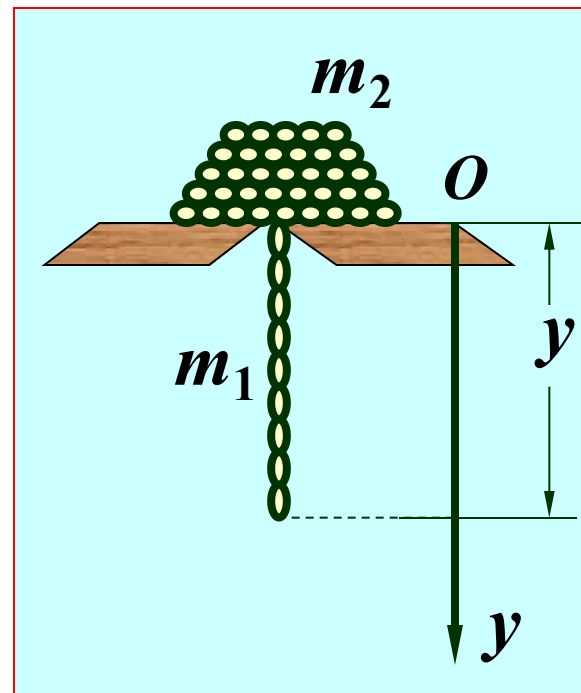
$$\text{则 } F = m_1 g = \lambda y g$$

由质点系动量定理得

$$F dt = dp$$

$$\text{因 } dp = d(\lambda y v) = \lambda d(yv)$$

$$\therefore \lambda y g dt = \lambda d(yv) \quad yg = \frac{d(yv)}{dt}$$



$$yg = \frac{d(yv)}{dt}$$

两边同乘以 ydy 则

$$y^2 g dy = ydy \frac{d(yv)}{dt} = yv d(yv)$$

$$g \int_0^y y^2 d y = \int_0^{yv} yv d(yv)$$

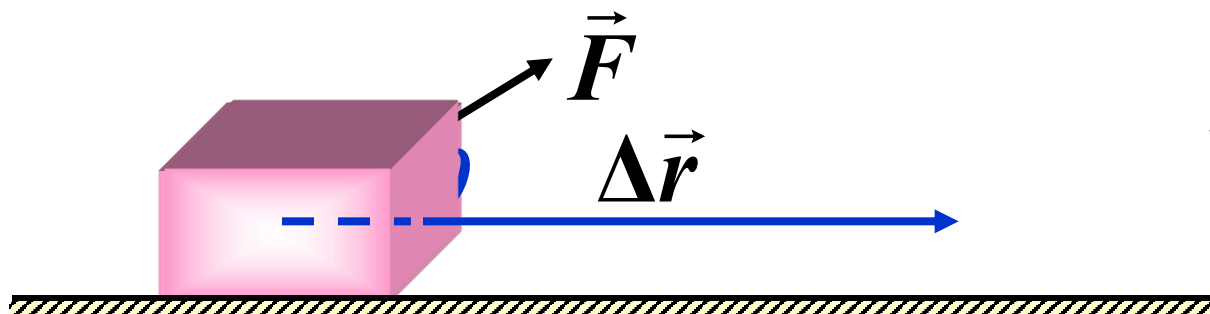
$$\frac{1}{3} g y^3 = \frac{1}{2} (yv)^2 \quad v = \left(\frac{2}{3} g y \right)^{1/2}$$



§ 3.5 功 动能定理

一、功：力对空间的累积

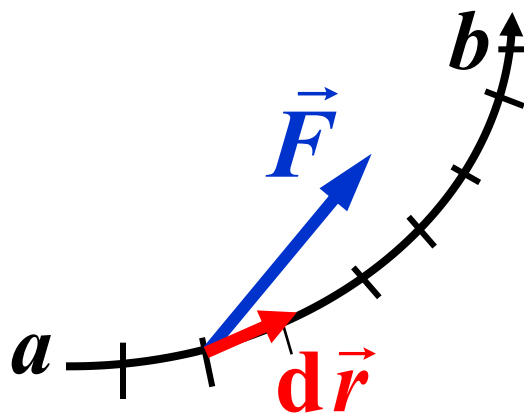
1. 恒力的功



$$A = F |\Delta \vec{r}| \cos \theta$$
$$= \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

2. 变力的功

将 L 分割成许多元位移 $d\vec{r}$
在 $d\vec{r}$ 中力可看作恒力



元功: $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

总功: $A = \int_a^b dA = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$

一般定义式

3. 功率 $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

说明

(1) 功是标量, 没有方向, 有正负;

$$\theta < \frac{\pi}{2} \quad A > 0 \qquad \theta = \frac{\pi}{2} \quad A = 0$$

$$\theta > \frac{\pi}{2} \quad A < 0$$

(2) 功是过程量;



(3) 不同坐标系中功的表示:

a. 直角坐标系中

$$A = \int_{x_a}^{x_b} F_x dx + \int_{y_a}^{y_b} F_y dy + \int_{z_a}^{z_b} F_z dz$$

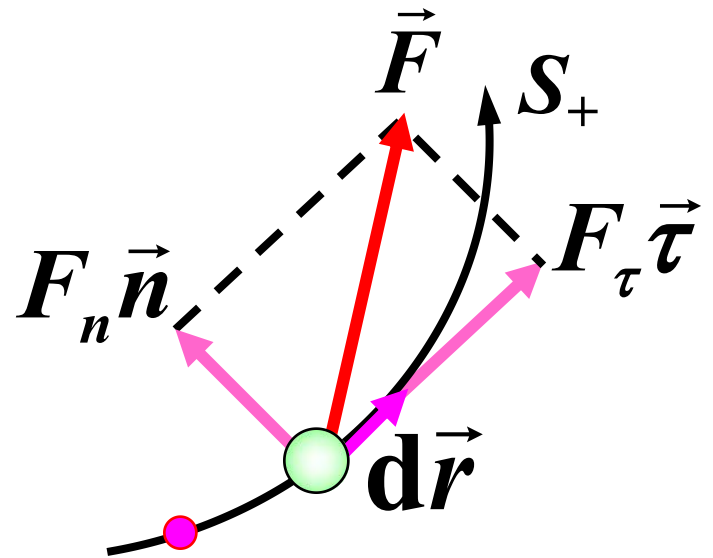
b. 自然坐标系中

$$\vec{F} = F_\tau \vec{\tau} + F_n \vec{n}$$

$$d\vec{r} = |d\vec{r}| \vec{\tau}$$

$$A = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b F_\tau |d\vec{r}|$$

$$= \int_a^b F_\tau ds$$



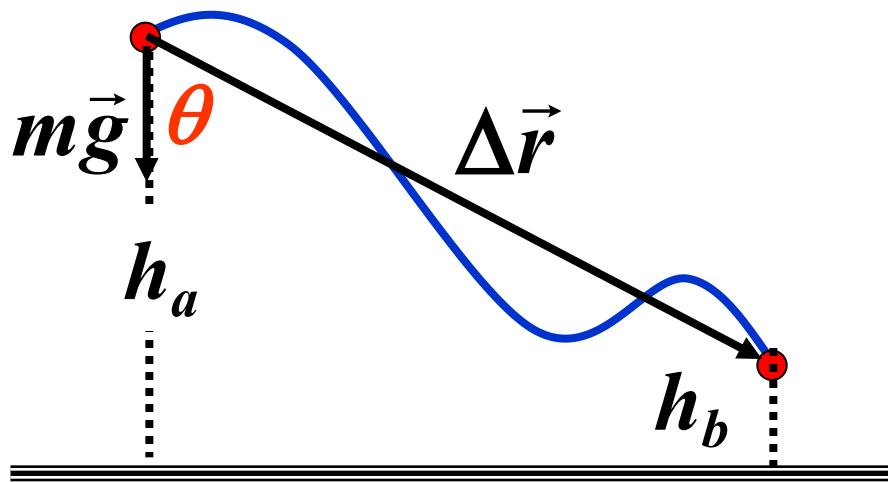
计算：恒力的功

$$A = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_a^b d\vec{r} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

恒力的功与路径无关。

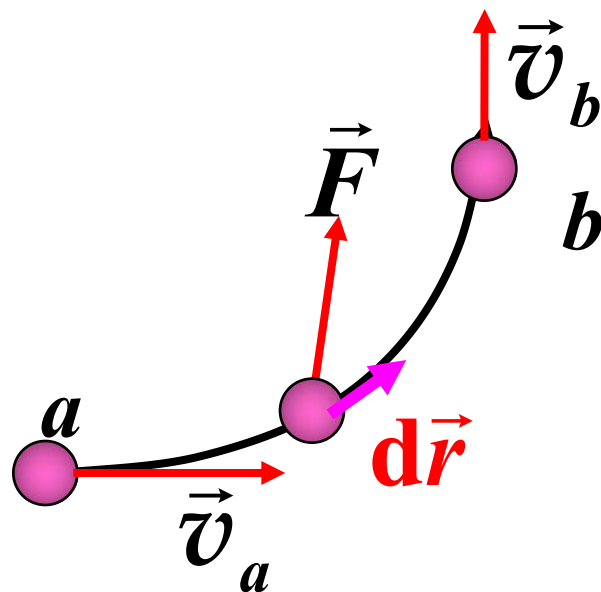
重力的功

$$\begin{aligned} A &= m\vec{g} \cdot \Delta\vec{r} \\ &= mg \Delta r \cos \theta \\ &= mg(h_a - h_b) \end{aligned}$$



二、动能定理

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_a^b F_\tau ds = \int_a^b m a_\tau ds \\ &= \int_a^b m \frac{dv}{dt} ds = \int_{v_a}^{v_b} m v dv \\ &= \frac{1}{2} m v_b^2 - \frac{1}{2} m v_a^2 \\ &= E_{kb} - E_{ka} = \Delta E_k \end{aligned}$$



质点的动能定理：合外力对质点做的功等于质点动能的增量。



说明

(1) 功的意义:

合外力的功反映了动能和其它形式能量间的转化。

做正功: 其它形式的能量→动能

做负功: 动能→其它形式的能量

功是能量变化的量度——功的真正内涵

正负决定能量转化的方式,
大小反映了能量转化的多少。

(2) 动能定理只在惯性系中成立。

(3) 便于处理中间过程复杂的问题。



例：质量15g的子弹，以200米/秒的速度射入固定的木板，阻力与射入木板的深度成正比：

$$f = -\beta x \quad (\beta = 5.0 \times 10^3 \text{ N/cm})$$

求：子弹射入木板的深度。

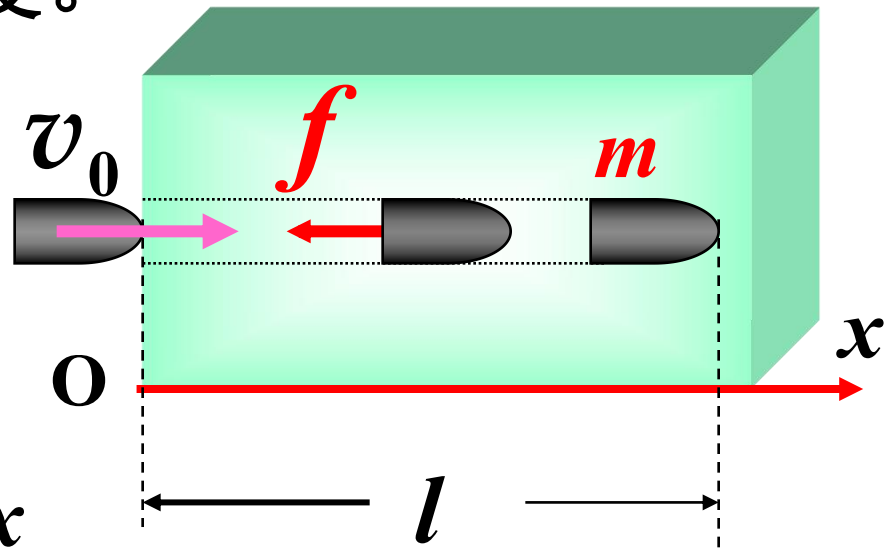
解：法1：由动能定理

以 m 为研究对象

设射入深度为 l

$$\begin{aligned} A &= \int_l f dx = \int_0^l -\beta x dx \\ &= -\frac{1}{2} \beta l^2 = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2 \end{aligned}$$

$$\therefore l = \sqrt{m v_0^2 / \beta} = 3.46 \times 10^{-2} \text{ m}$$



法2：用牛顿定理

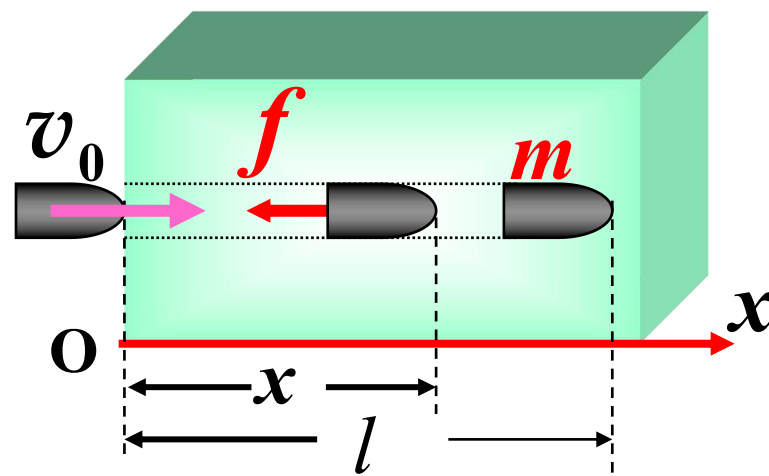
$$\because f = ma = m \frac{dv}{dt}$$

$$\therefore -\beta x = m \frac{dv}{dt}$$

$$= m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx}$$

$$\int_0^l -\beta x dx = \int_{v_0}^0 m v dv$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \beta l^2 = -\frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow l = \sqrt{\frac{m v_0^2}{\beta}}$$



三、质点系动能定理

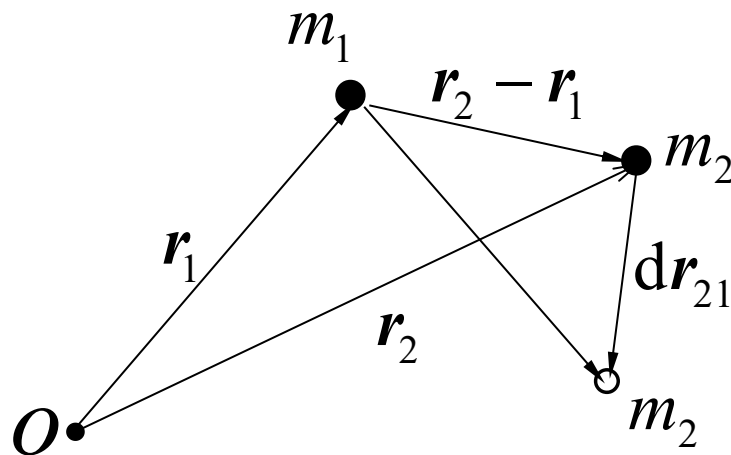
对于多个质点组成的质点系统，将每个质点逐一运用动能定理并求和，考虑到系统外力和系统内力做功，可将式推广后可得

$$A_{\text{外}} + A_{\text{内}} = E_k - E_{k0}$$

对力的功

这一对内力所做的元功为

$$dA = \mathbf{f}_{12} \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{f}_{21} \cdot d\mathbf{r}_2$$



$$\boldsymbol{f}_{21} = -\boldsymbol{f}_{12}$$

$$dA = \boldsymbol{f}_{21} \cdot (d\boldsymbol{r}_2 - d\boldsymbol{r}_1) = \boldsymbol{f}_{21} \cdot d(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) = \boldsymbol{f}_{21} \cdot d\boldsymbol{r}_{21}$$

一对内力做功，只与其中一个质点受力与这个质点相对另一质点发生的相对位移有关，与参考系选取无关。

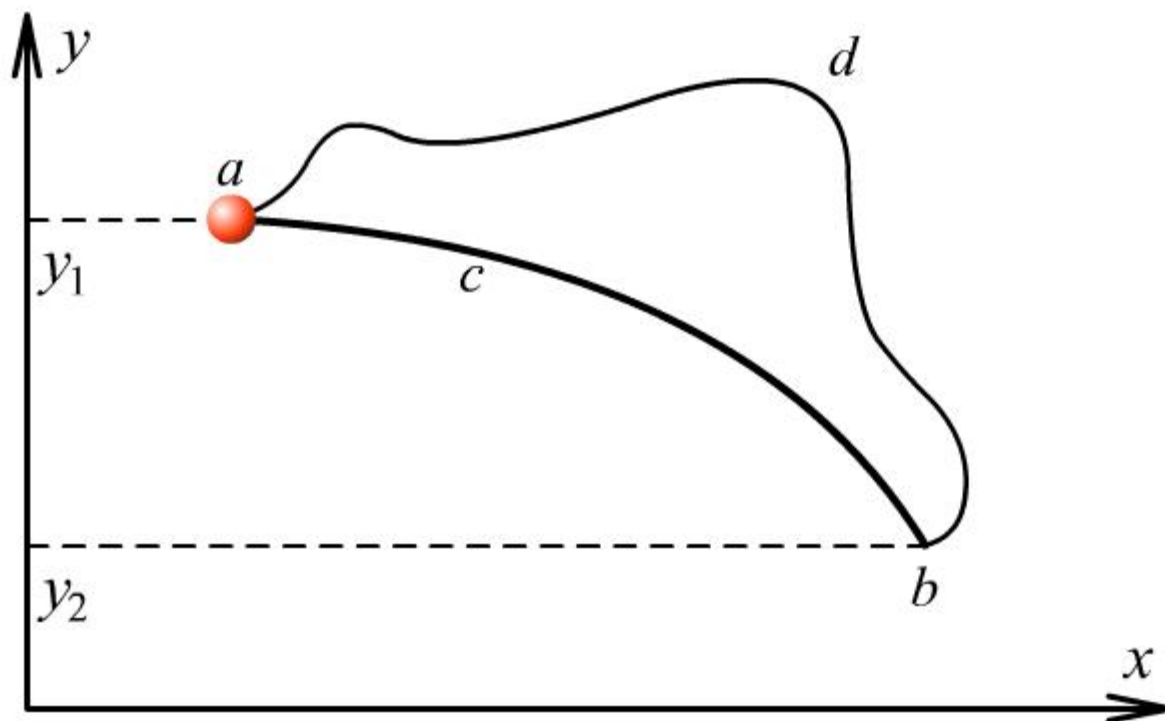
质点系的动能定理：质点系外力与质点系内力做功的代数和等于质点系总动能的增量。



§ 3.6 保守力 势能

一、保守力做功特点

1. 重力的功



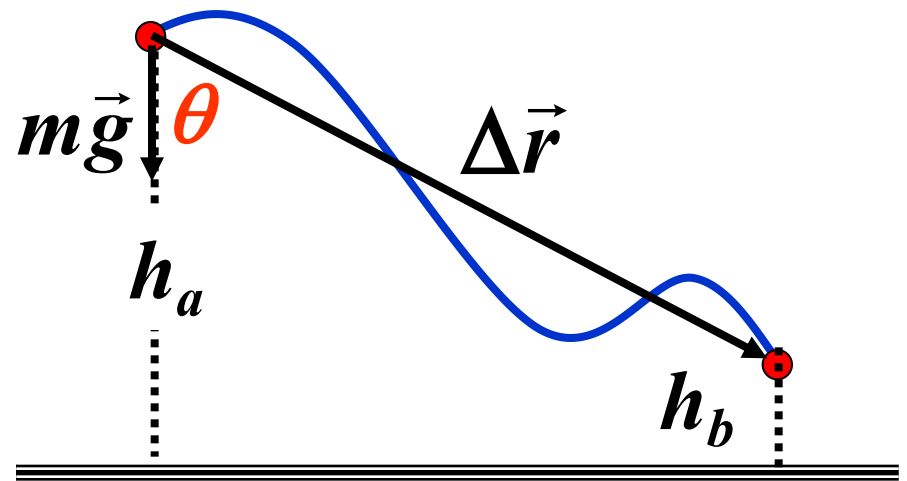
$$dA = m\vec{g} \cdot d\vec{r} = -mgdy$$

$$A = -mg \int_{y_1}^{y_2} dy = mg(y_1 - y_2)$$

$$A = mg(h_a - h_b)$$

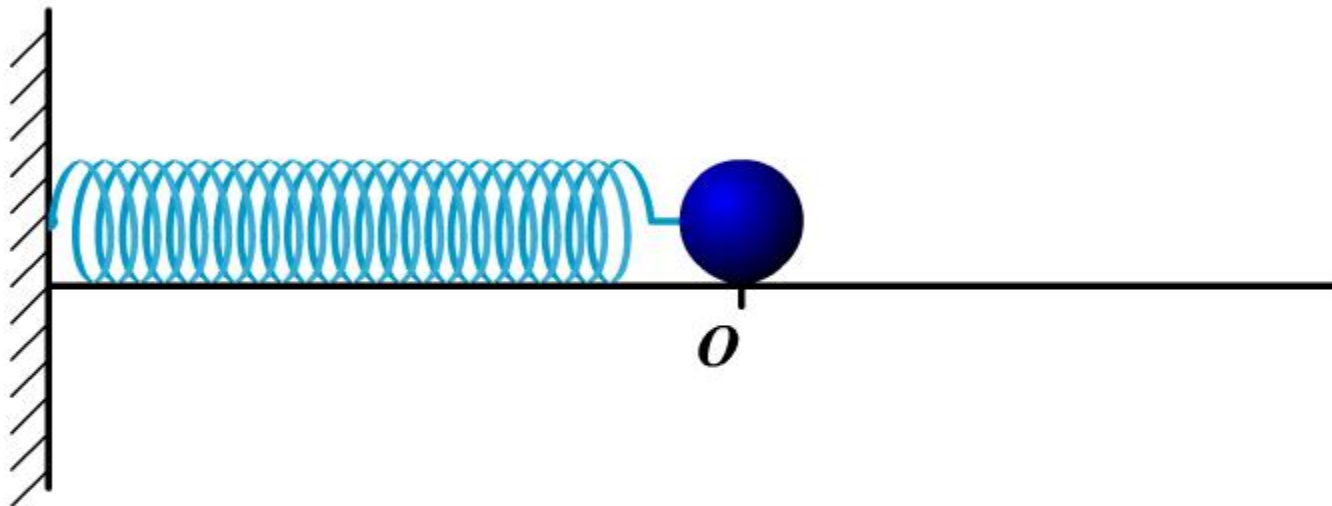
沿闭合路径做功：

$$A = 0$$



特点： 重力做功与路径无关，沿闭合路径做功等于零。

2. 弹力的功



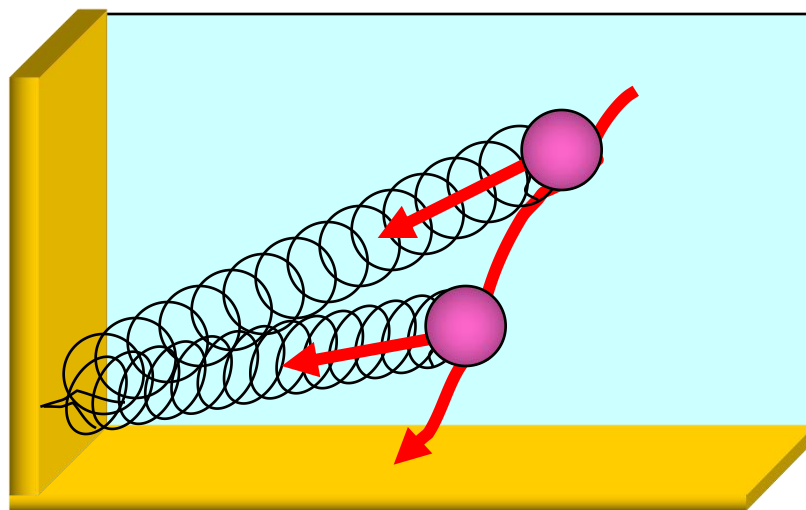
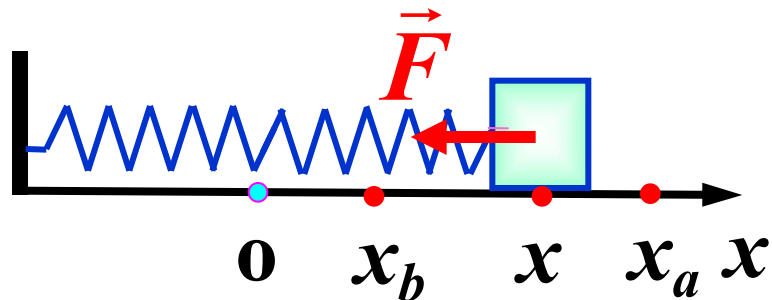
$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

$$A = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{x_a}^{x_b} -kx dx$$

$$= \frac{1}{2}kx_a^2 - \frac{1}{2}kx_b^2$$

弹性力做功与路径无关



3. 万有引力的功

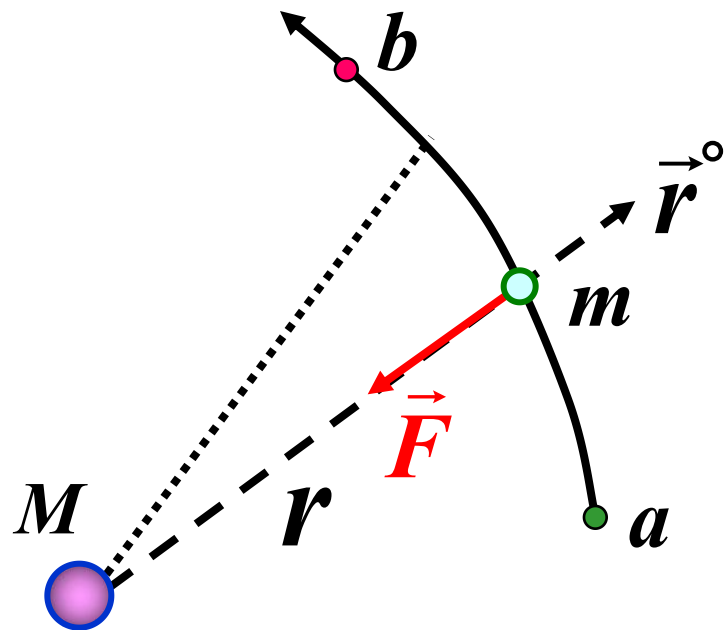


$$\vec{F} = -G_0 \frac{mM}{r^2} \vec{r}^\circ$$

$$A = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_a^b -G_0 \frac{mM}{r^2} \vec{r}^\circ \cdot d\vec{r}$$

$$= \left(-G_0 \frac{mM}{r_a}\right) - \left(-G_0 \frac{mM}{r_b}\right)$$



万有引力做功与路径无关。

保守力做功特点

做功与路径无关、或沿闭合路径做功等于零。否则为非保守力（例如摩擦力）。

二、势能（位能）

1. 定义：与相互作用的物体的相对位置有关的能量。

$$A_{ab} = \int_a^b \vec{F}_{\text{保}} \cdot d\vec{r} = E_{pa} - E_{pb} = -\Delta E_p$$

保守力做功等于势能增量的负值。

设 b 为势能零点 $E_{pb} = 0$

$$E_{pa} = \int_a^{\text{势能零点}} \vec{F}_{\text{保}} \cdot d\vec{r}$$

2. 几种势能

(1) 重力势能

$$A = mgh_a - mgh_b \qquad E_{pa} = mgh$$

h 为 a 点与势能零点的高度差

(2) 弹性势能:

$$A = \frac{1}{2}kx_a^2 - \frac{1}{2}kx_b^2$$

取平衡位置为势能零点: $x_b = 0$

$$\therefore E_p = \frac{1}{2}kx^2$$



(3) 引力势能

$$A = G_0 \frac{mM}{r_b} - G_0 \frac{mM}{r_a}$$

取无穷远为势能零点: $r_R = \infty$

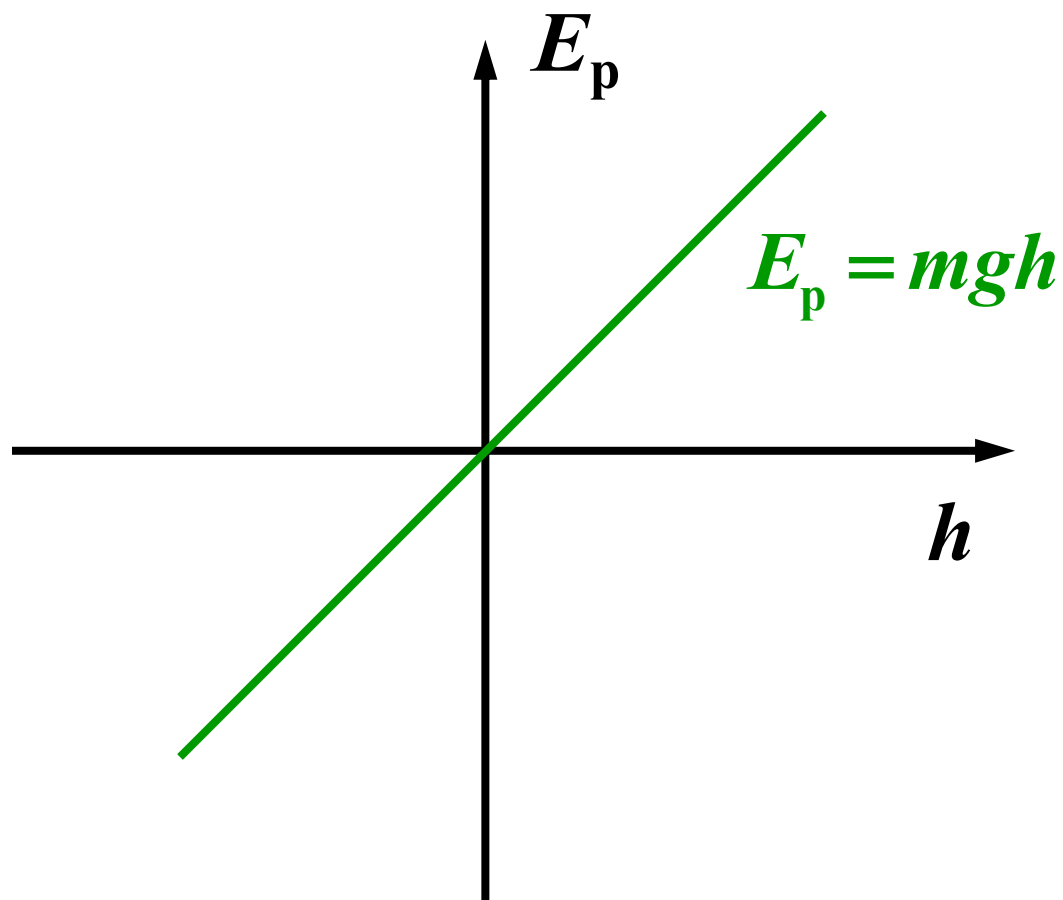
$$\therefore E_{pa} = -G_0 \frac{mM}{r}$$



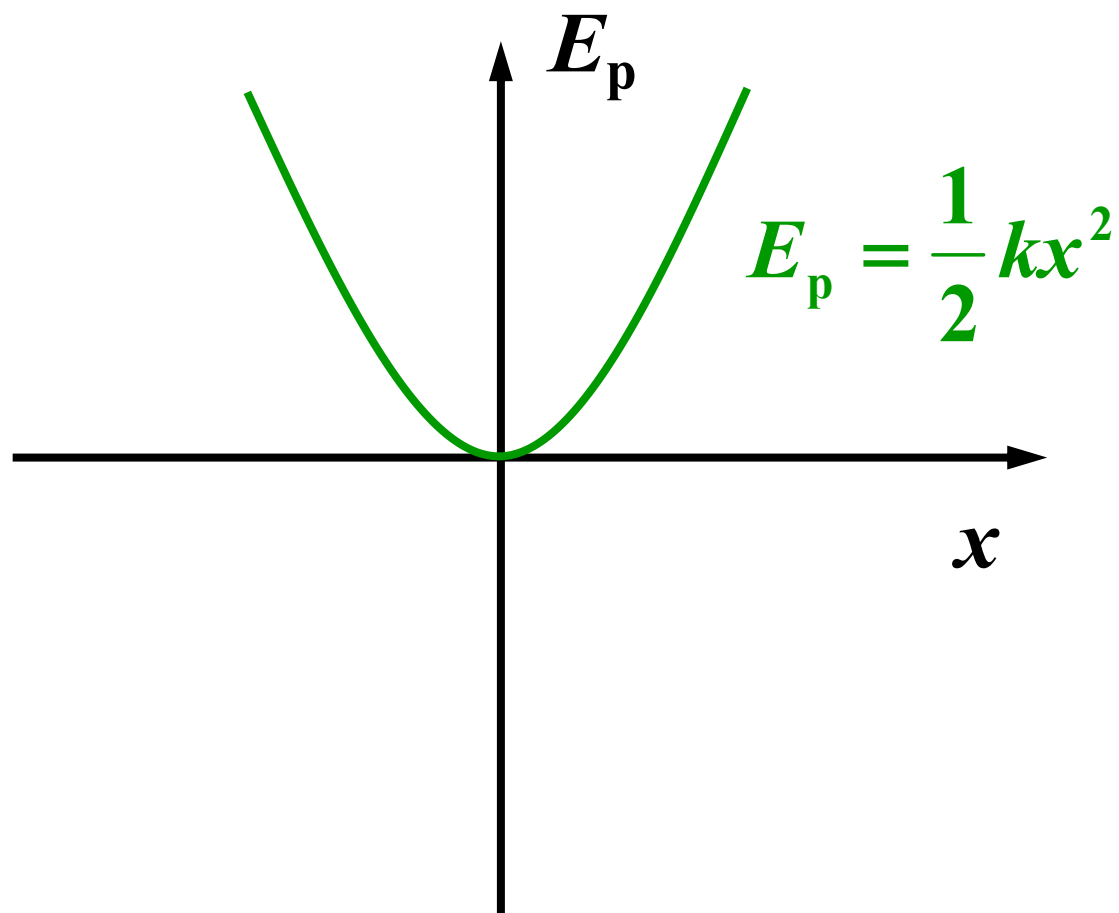
注意

- (1) 势能属于以保守力相互作用的质点系统。
只有保守内力，才能建立势能的概念。
- (2) 势能是一种潜在能量。
- (3) 势能零点的选取是任意的。

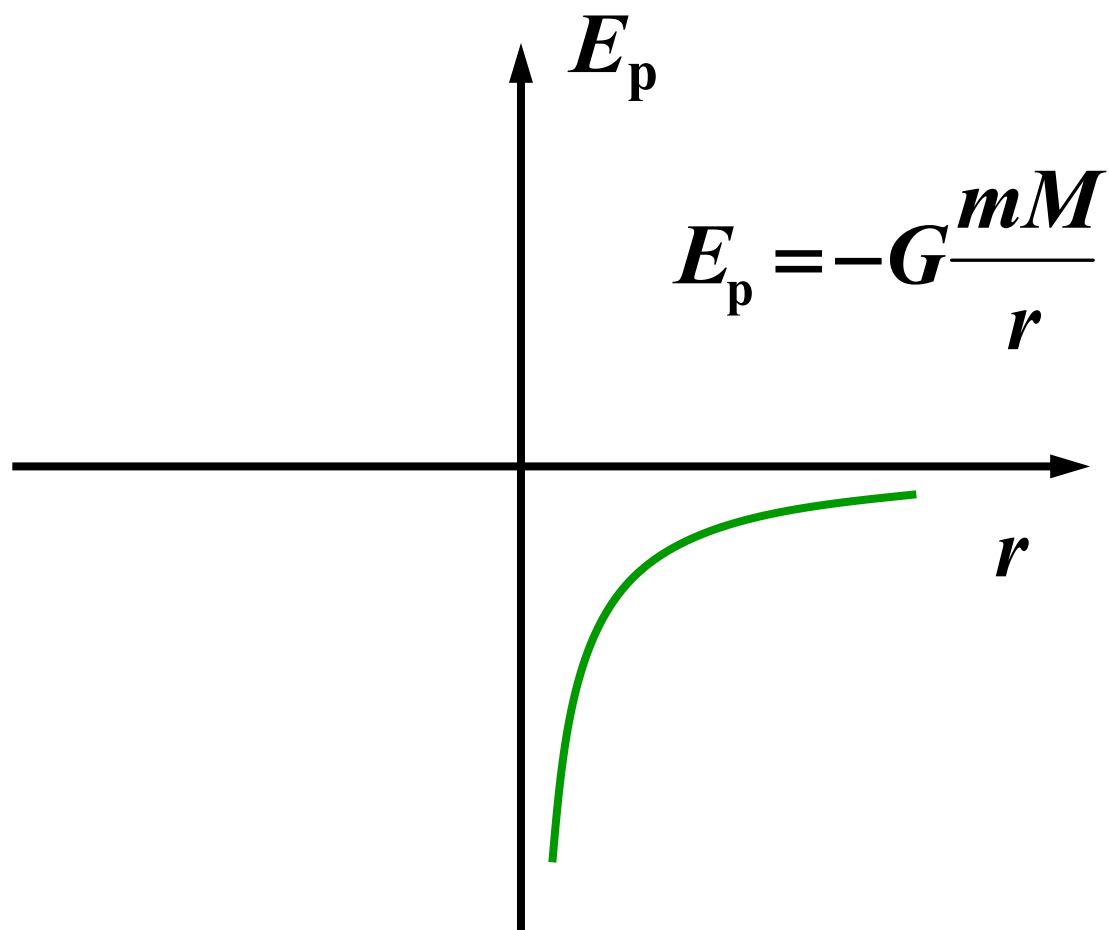
3. 势能曲线



重力势能曲线



弹性势能曲线



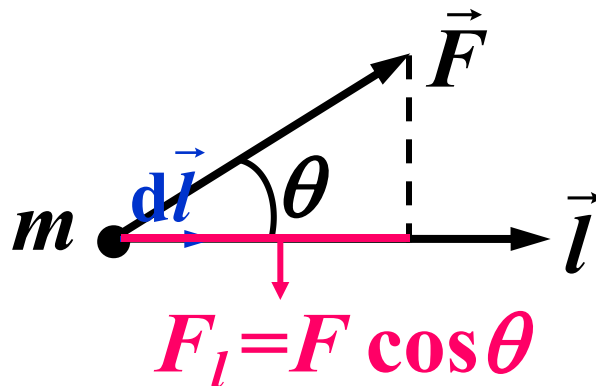
引力势能曲线

三、势能与保守力的关系

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = -dE_p$$

$$F \cos \theta \cdot dl = -dE_p$$

$$F_l = F \cos \theta = -\frac{dE_p}{dl}$$



通常 $E_p = E_p(x, y, z)$

直角坐标系中:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{k}\right)$$

$\therefore \vec{F} = -\text{grad} E_p$ 保守力等于势能梯度的负值



§ 3.7 机械能守恒定律

一、功能原理

质点系动能定理

$$A_{\text{外力}} + A_{\text{内力}} = E_{k2} - E_{k1}$$

$$\therefore A_{\text{外}} + A_{\text{保内}} + A_{\text{非保内}} = E_{k2} - E_{k1}$$

$$A_{\text{保内}} = -(E_{p2} - E_{p1})$$

$$\begin{aligned} A_{\text{外}} + A_{\text{非保内}} &= (E_{k2} + E_{p2}) - (E_{k1} + E_{p1}) \\ &= E_2 - E_1 \end{aligned}$$

质点系运动过程中，外力和非保守内力做功总和等于系统机械能的增量。



说明

(1) 功能原理与动能定理是等价的，只是形式上的变形。

$$A_{\text{外力}} + A_{\text{内力}} = E_{k2} - E_{k1}$$

$$A_{\text{外力}} + A_{\text{非保守内力}} = E_2 - E_1$$

(2) 只在惯性系中成立。

二、机械能守恒定律

若：只有保守内力做功

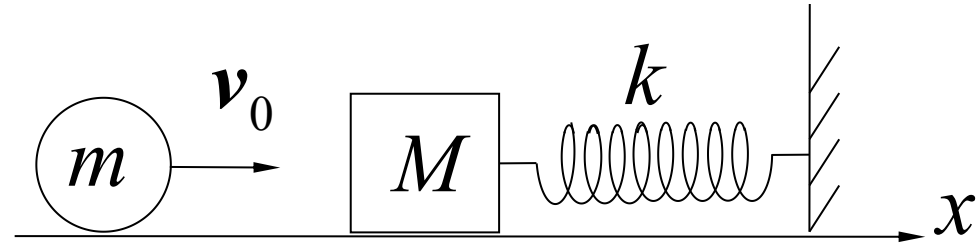
则： $E = E_k + E_p = \text{恒量}$

说明

机械能守恒定律是普遍的能量守恒定律的一个特例。

例：质量为 M 的物体在光滑水平面上与一弹簧相连，如图所示，弹簧劲度为 k ，今有一质量为 m 的小球以水平速率 v_0 与 M 相碰后以速率 v_1 弹回。求：（1）启动后，弹簧的最大压缩量；（2）如果碰撞后小球和物体粘在一起，情况又如何如何？

解：（1）运动分两个阶段，第一阶段系统动量守恒，以小球运动方向为正方向



$$mv_0 = Mv_M + (-mv_1)$$

第二阶段机械能守恒，设弹簧被压缩 Δx

$$\frac{1}{2}Mv_M^2 = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 \quad \Delta x = \sqrt{\frac{M}{k}} \cdot \frac{m}{M}(v_0 + v_1)$$



(2) 如果球和物体粘在一起，他们相碰后以相同速度 v 运动，在运动过程中机械能仍守恒

$$mv_0 = (m + M)v$$

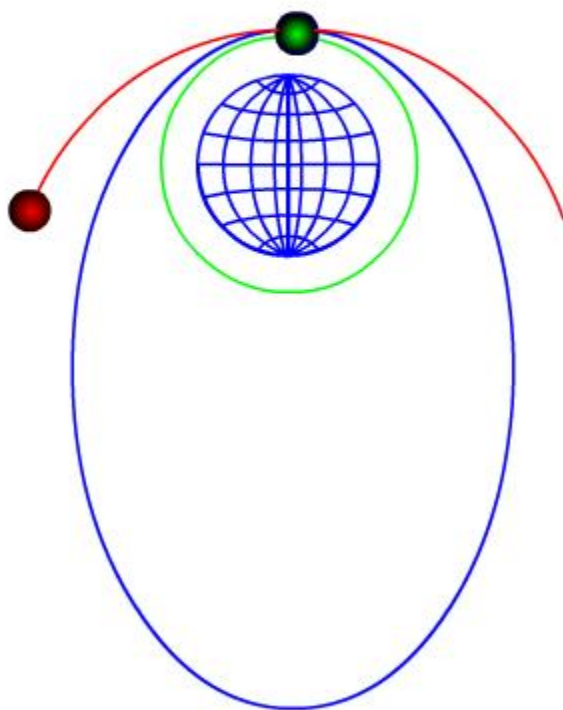
$$\frac{1}{2}(m + M)v^2 = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$$

解得 $\Delta x = mv_0 / \sqrt{k(m + M)}$



§ 3.8 宇宙速度

宇宙速度



第一宇宙速度:

$$V_1 = 7.9 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, E < 0$$

第二宇宙速度:

$$V_2 = 11.2 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, E = 0$$

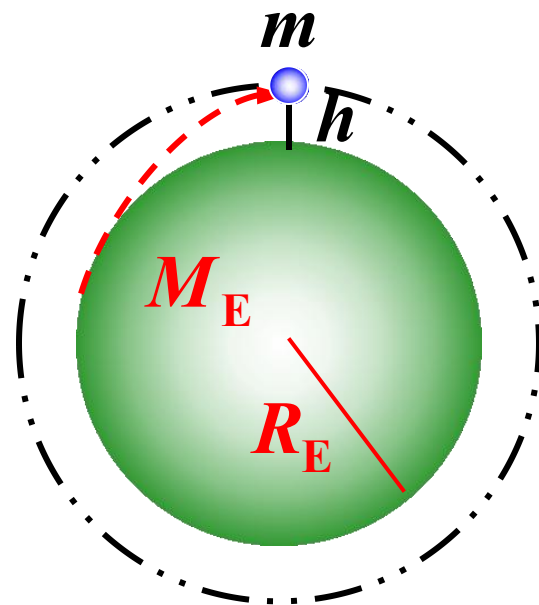
第三宇宙速度:

$$V_3 = 16.4 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, E > 0$$



第一宇宙速度：由地面处发射使物体环绕地球运动，所需的最小速度。

设于地球表面处 (R_E) 发射速度为 v_1 的物体，到达距地面高度为 h 处，以速度 v 绕地球作匀速圆周运动，系统机械能守恒（为什么？）



$$\frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{M_E m}{R_E} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_E m}{R_E + h}$$

$$m\frac{v^2}{R_E + h} = \frac{GM_E m}{(R_E + h)^2}$$

解得 $v_1 = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E} - \frac{GM_E}{R_E + h}} \quad mg = \frac{GM_E m}{R_E^2}$

$$= \sqrt{R_E g \left(2 - \frac{R_E}{R_E + h} \right)}$$

当 $R_E \gg h$ (或 $h \rightarrow 0$)

$$v_1 = \sqrt{gR_E} \approx 7.9 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

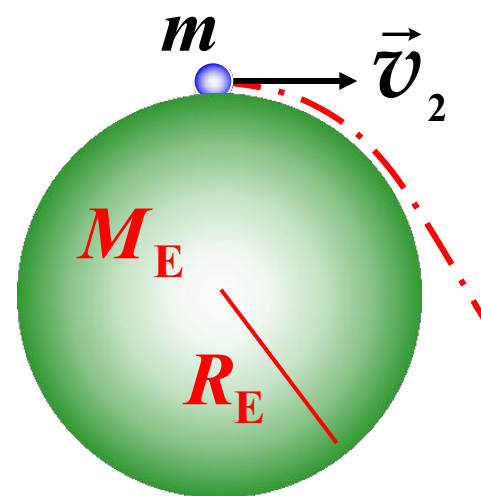


第二宇宙速度(逃逸速度)：使物体脱离地球引力范围所需的最小速度。

物体脱离地球引力时，引力势能为零，所以由机械能守恒得

$$E_p + E_k = \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{M_E m}{R_E} = 0$$

$$\begin{aligned}\therefore v_2 &= \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}} = \sqrt{2gR_E} \\ &= 11.2 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}\end{aligned}$$



黑洞的讨论

对任一星球，若要脱离其引力范围的最小速度。

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad \left[\begin{array}{l} M \text{ 为该星球质量} \\ r \text{ 为星球半径} \end{array} \right]$$

若 $v = c$ （光速）

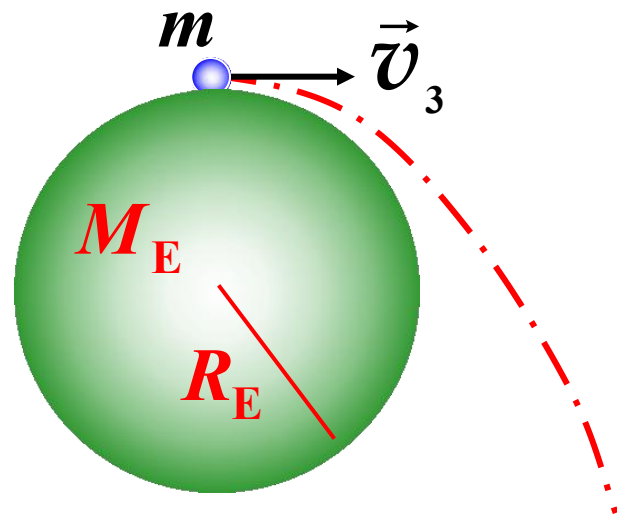
则任何物体都不可能从该星球中逃逸出来。



第三宇宙速度：使物体脱离太阳引力范围所需的最小速度。

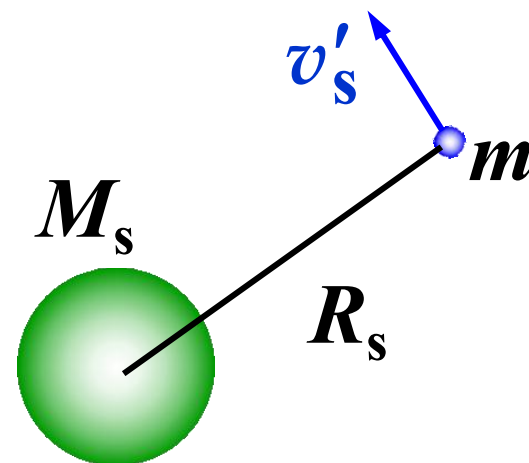
先以地球为参考系。设从地球发射一个速度为 v_3 的物体，脱离地球引力时，它相对地球的速度为 v'_E ，根据机械能守恒定律，有

$$\frac{1}{2}mv_3^2 - G\frac{M_E m}{R_E} = \frac{1}{2}mv_E'^2$$



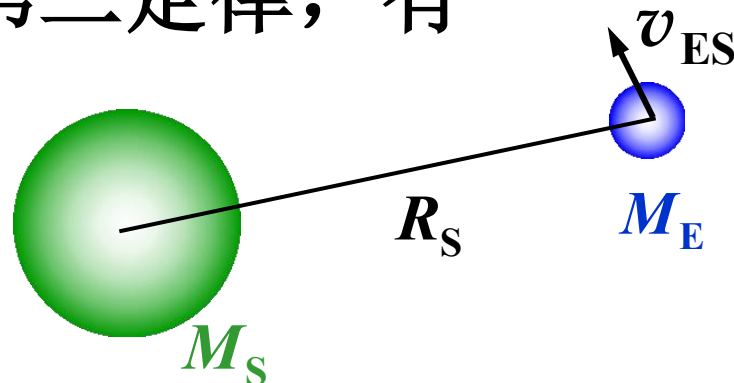
再以太阳为参照系。物体在太阳引力下飞行。设太阳的质量为 M_s ，物体脱离地球引力时，相对太阳的速度为 v'_s ，与太阳之间的距离可近似为地球与太阳之间的距离 R_s 。要想脱离太阳引力的作用，物体的机械能至少应为

$$\frac{1}{2} m v_s'^2 - G \frac{M_s m}{R_s} = 0$$



最后考虑地球绕太阳的公转。设地球公转速度为 v_{ES} ，根据牛顿第二定律，有

$$\frac{GM_E M_S}{R_S^2} = M_E \frac{v_{ES}^2}{R_S}$$



根据速度变换公式 $\vec{v}'_E = \vec{v}'_S - \vec{v}_{ES}$

如果 \vec{v}'_E 与 \vec{v}_{ES} 同方向，则 \vec{v}'_S 最大，此时

$$v'_E = v'_S - v_{ES} = (\sqrt{2} - 1) \sqrt{G \frac{M_S}{R_S}}$$

代入 $M_S = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg},$

$$R_S = 1.50 \times 10^{11} \text{ m},$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2},$$

得 $v'_E = 12.3 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$v_3 = \sqrt{v_E'^2 + 2G \frac{M_E}{R_E}}$$

将 v'_E 、 G 、 R_E 以及 $M_E = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$ ，代入上式，算出第三宇宙速度为

$$v_3 = 16.6 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

