

1. 函数 $z = x^2 + y^2$ 在 $(1,1)$ 点沿 $\vec{l} = (-1,-1)$ 方向的方向导数为().

A. 最大; B. 最小; C. 0; D. 1.

答案: B

解析:

$$z = x^2 + y^2, \text{grad}z|_{(1,1)} = (2x, 2y)|_{(1,1)} = (2, 2)$$

$\vec{l} = (-1,-1)$ 为负梯度方向, 负梯度方向的方向导数最小,

故选B

2. 已知 $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, 则 $\text{grad}u = (\quad)$.

A. $(2x, 2y, 2z)$; B. $\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}$; C. (x, y, z) ; D. $(1, 1, 1)$.

答案: A

$$\text{解析: } \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \frac{\partial u}{\partial z} = 2z, \text{grad}u(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$$

3. 函数 $z = 2x + y$ 在点 $(1, 2)$ 沿各方向的方向导数的最大值为().

A. 3; B. 0; C. $\sqrt{5}$; D. 2.

答案: C

解析:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2, \frac{\partial z}{\partial y} = 1, \text{grad}z(x, y) = (2, 1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial d} \text{ 的最大值为 } |\text{grad}z(x, y)| = |(2, 1)| = \sqrt{5}$$

4. 对函数 $f(x, y) = xy$, 点 $(0, 0)$ ().

A. 不是驻点; B. 是驻点却非极值点; C. 是极大值点; D. 是极小值点.

答案: B

解析:

$$f(x, y) = xy,$$

$$f'_x(x, y) = y, f'_x(0, 0) = 0, f'_y(x, y) = x, f'_y(0, 0) = 0$$

$$x > 0, y > 0, f(x, y) = xy > 0 = f(0, 0)$$

$$x > 0, y < 0, f(x, y) = xy < 0 = f(0, 0)$$

5. $z_x(x_0, y_0) = 0$ 和 $z_y(x_0, y_0) = 0$ 是函数 $z = z(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处取得极大值或极小值的

().

A. 必要条件但非充分条件;

B. 充分条件但非必要条件;

C. 充要条件;

D. 既非必要条件也非充分条件.

答案: A

6.某工厂计划生产两种型号的医疗仪器，其产量分别为 x 和 y 台，所需成本为 z ，且 z 与 x 和 y 的函数关系为： $z(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$ （单位：万元）.现需要这两种仪器共 8 台，问应如何安排生产，才能使成本最小？

答案：

解 本题是求函数 $z(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$ 在约束条件 $x + y - 8 = 0$ 下的最小值。

首先，构造拉格朗日函数 $F(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy + \lambda(x + y - 8)$ 。

其次，解方程组

$$\begin{cases} F'_x = 2x - y + \lambda = 0, \\ F'_y = 4y - x + \lambda = 0, \\ F'_\lambda = x + y - 8 = 0, \end{cases}$$

得 $x = 5, y = 3, \lambda = -7$;

最后，由于实际问题的最小值一定存在，且 $x = 5, y = 3$ 是 $F(x, y)$ 的唯一驻点，因此

$x = 5, y = 3$ 是所求问题的最小值点。故当两种型号的仪器各生产 5 台和 3 台时，总成本最小为 28 万元。