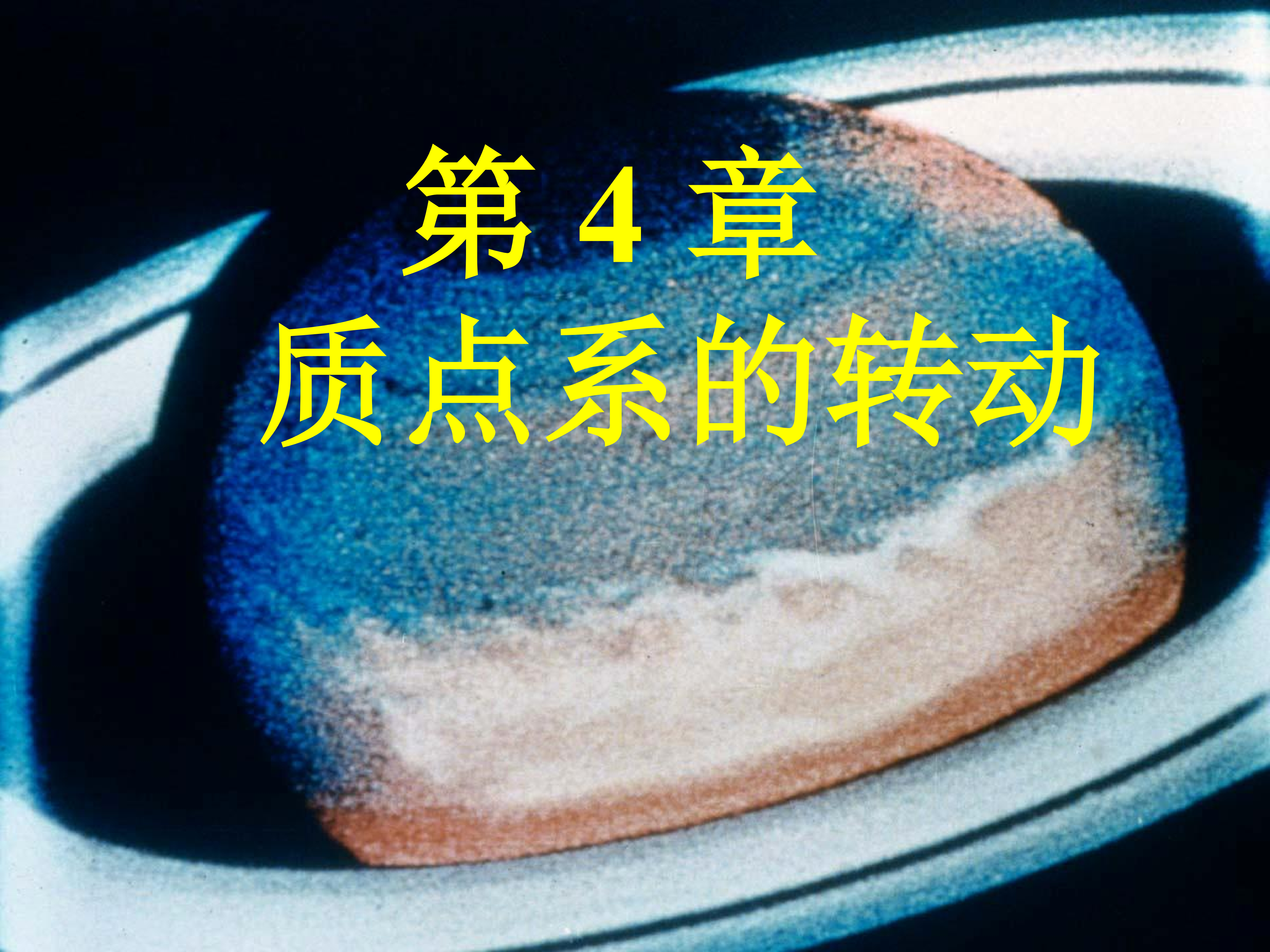

第 4 章
质点系的转动

§4.1 刚体的运动

一、刚体

任何情况下大小形状都不发生变化的物体。

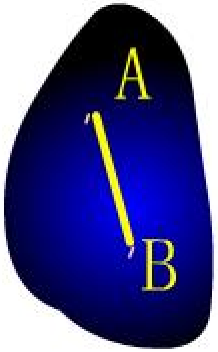
刚体可看作一个包含大量质点，但各质点间距离保持不变的质点系。

注意

刚体形变可忽略，但产生的弹性力不能忽略。

二、刚体的运动

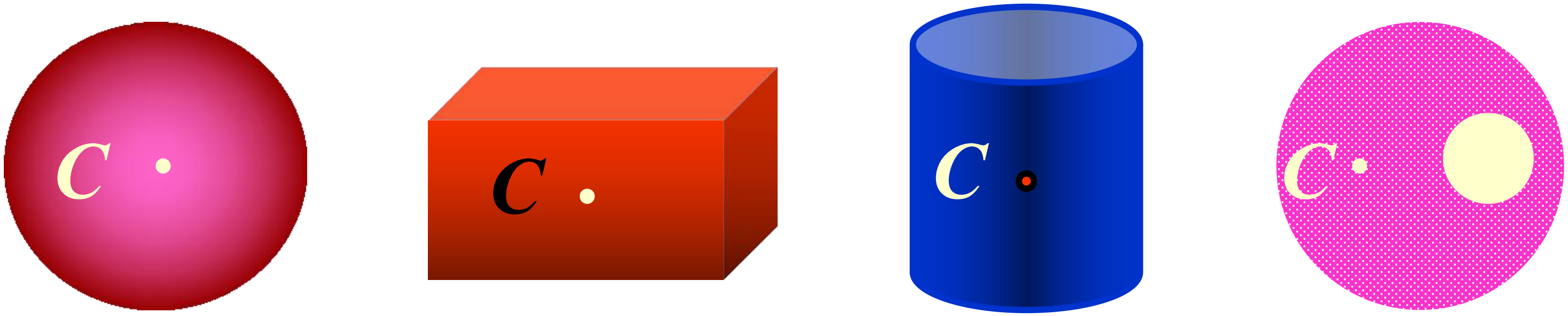
1. 平动



特点 各点运动状态相同

平动的刚体可视为质点，通常用质心（质量中心）的运动代表。

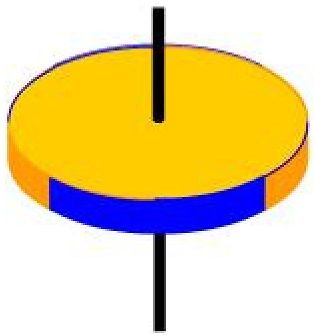
对于密度均匀、形状对称的刚体，质心就在几何中心。

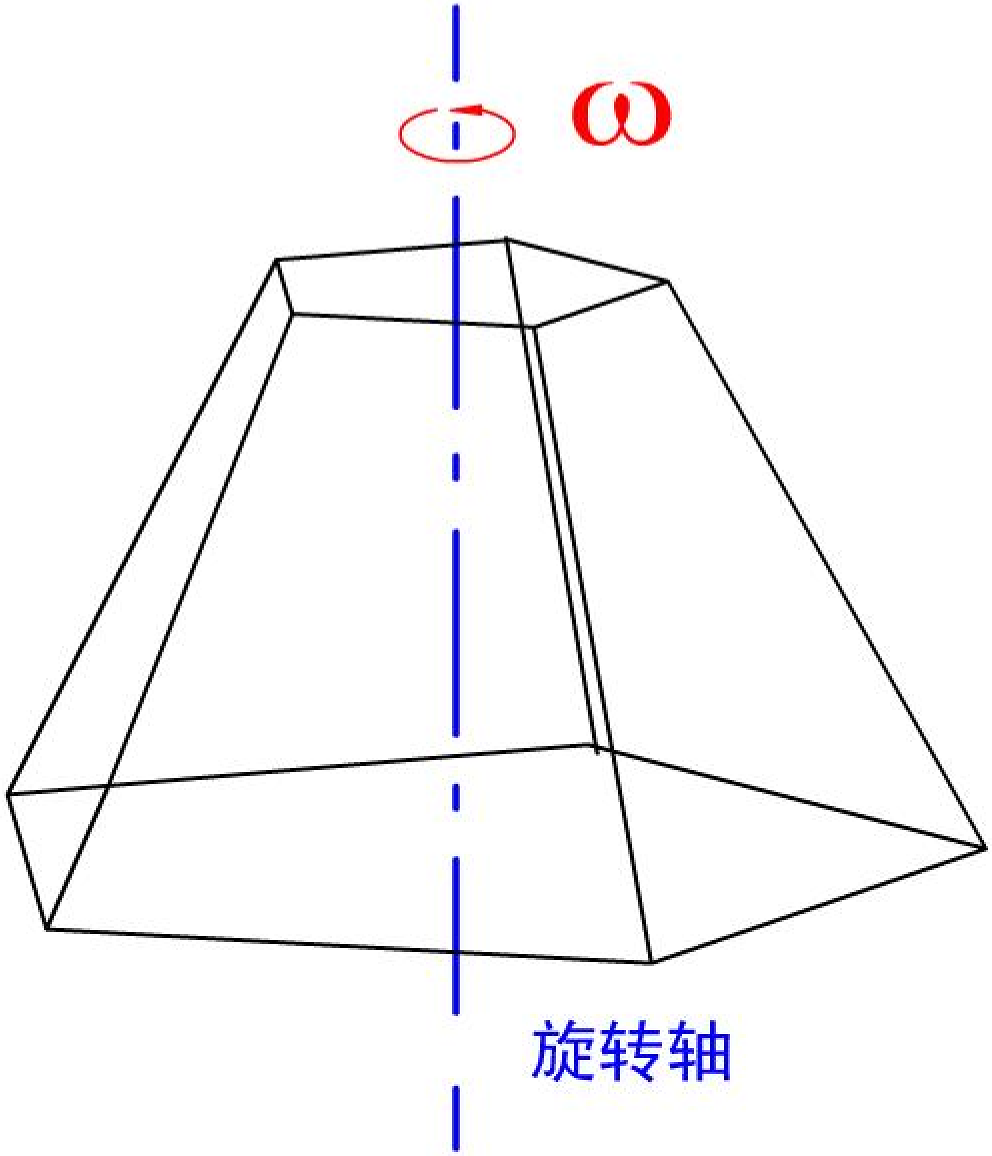


刚体平动 → 质点运动

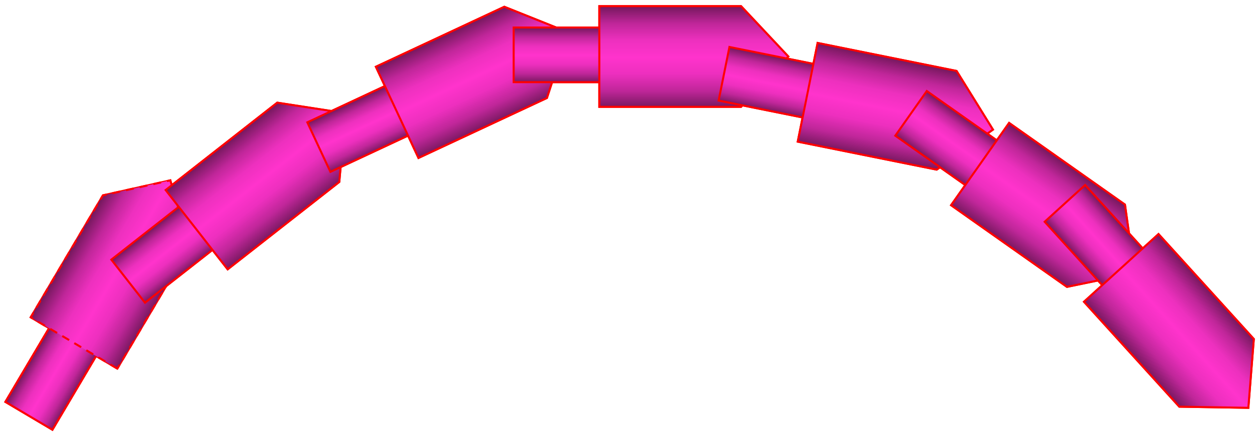
2. 定轴转动

刚体运动时，各质点以某一固定直线（转轴）上的点为圆心，在垂直于该直线的平面（转动平面）内作圆周运动。

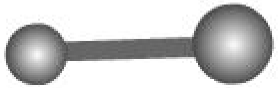


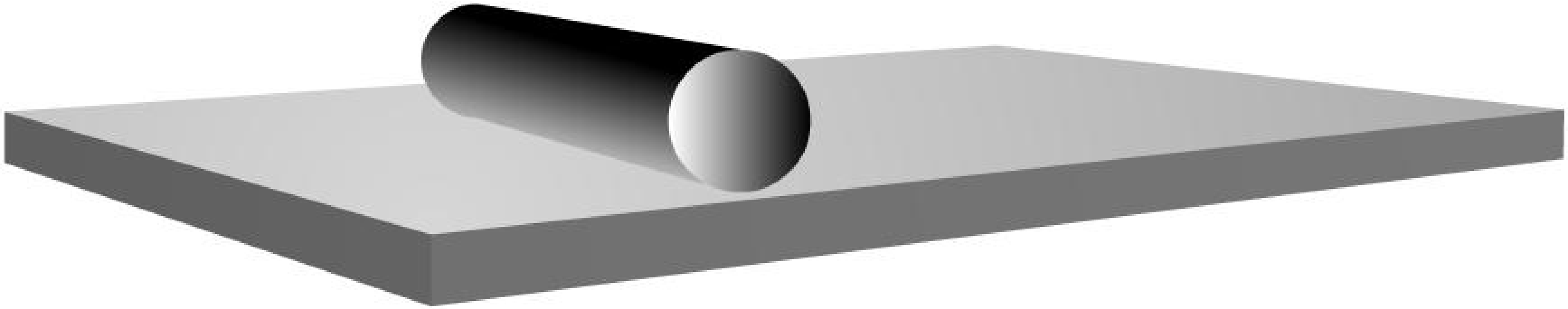

ω
旋转轴

3. 一般运动



随质心的平动 + 绕质心的转动





刚体的一般运动

三、描述定轴转动的物理量

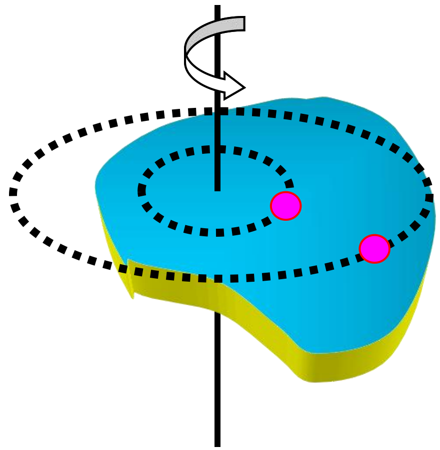
$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

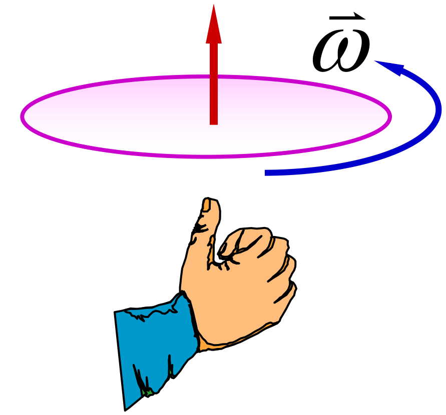
$$\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

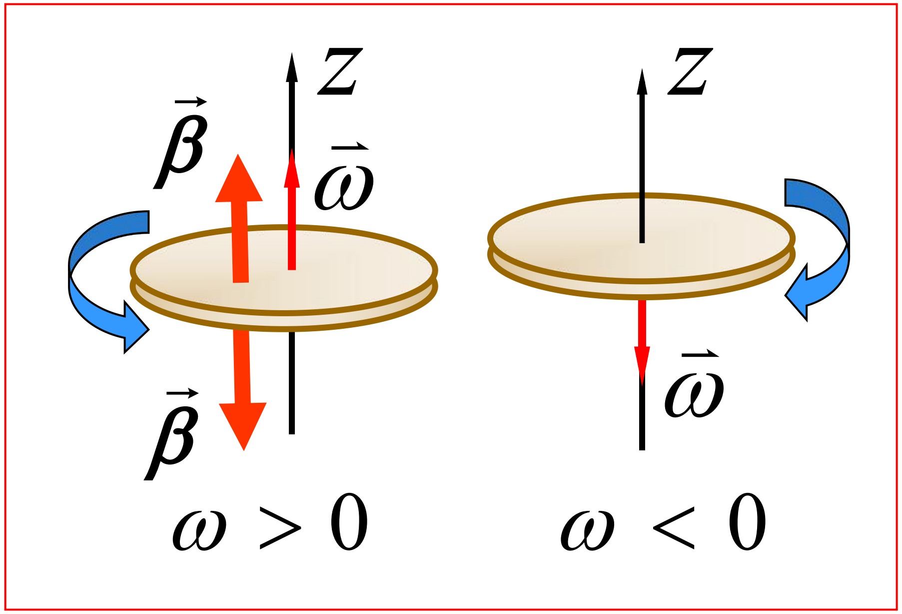
$$v = R\omega$$

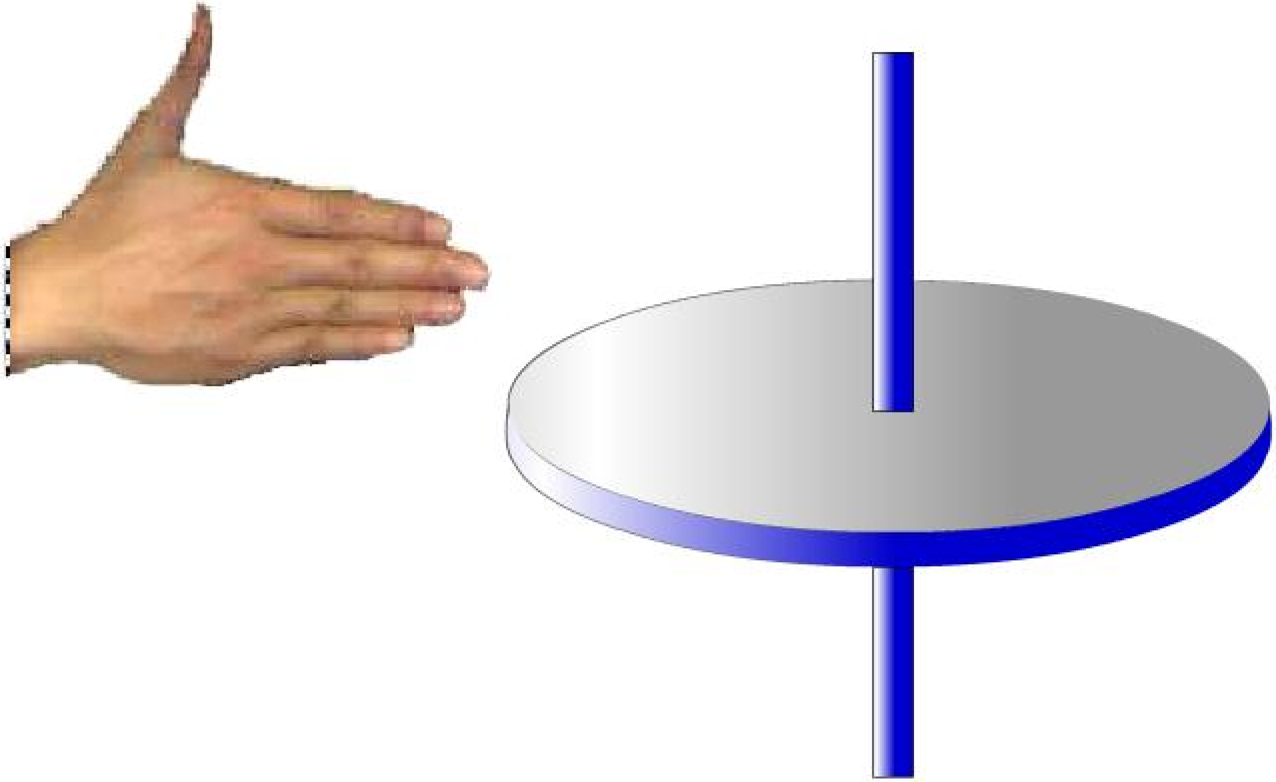
$$a_\mathrm{n} = R\omega^2$$

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$









§ 4.2　力矩　定轴转动定律

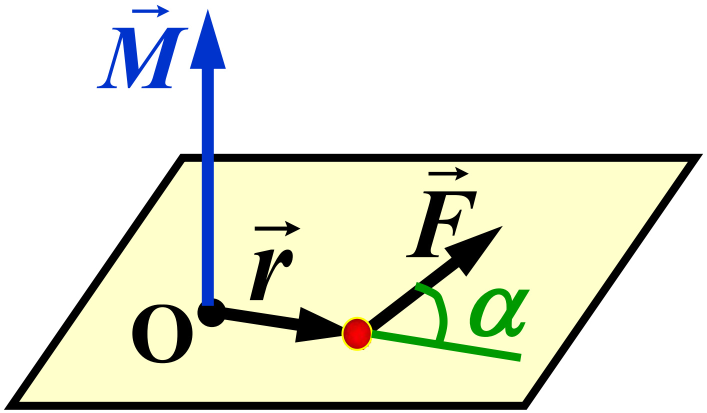
一、力矩

力对点的矩

定义：$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

大小：$M = rF\sin\alpha$

方向：$\vec{r} \times \vec{F}$ 的方向



注意

$\vec{M}$ 与O点的选取有关

$\vec{M} = 0$：$r = 0$　　作用点为O

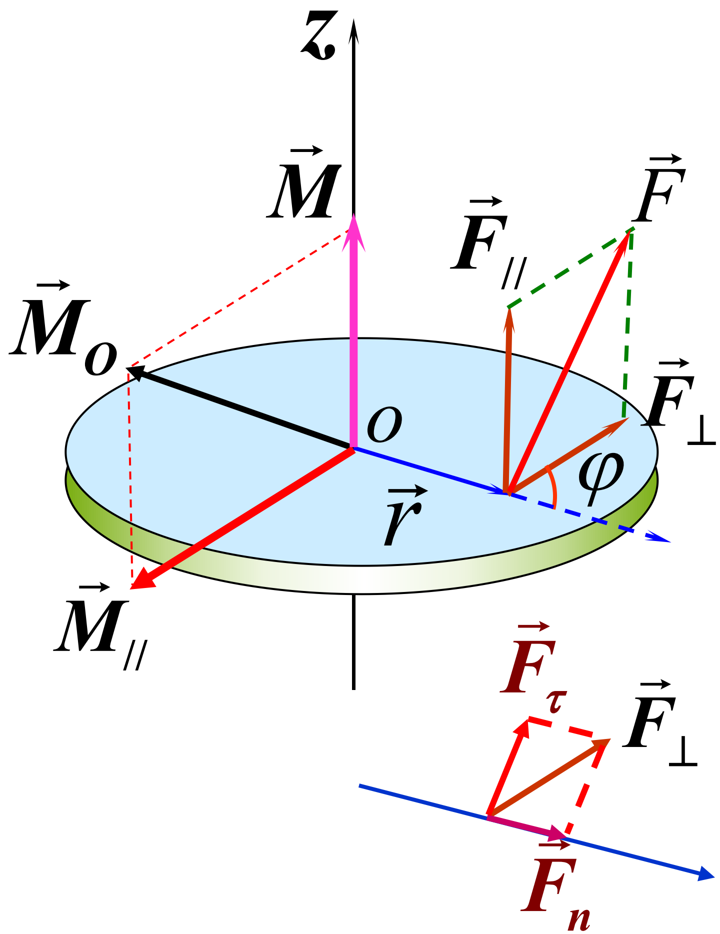
$\alpha = 0^\circ, 180^\circ$　　力作用线过O

力对定轴的矩

$$M = rF_{\perp}\sin\varphi$$

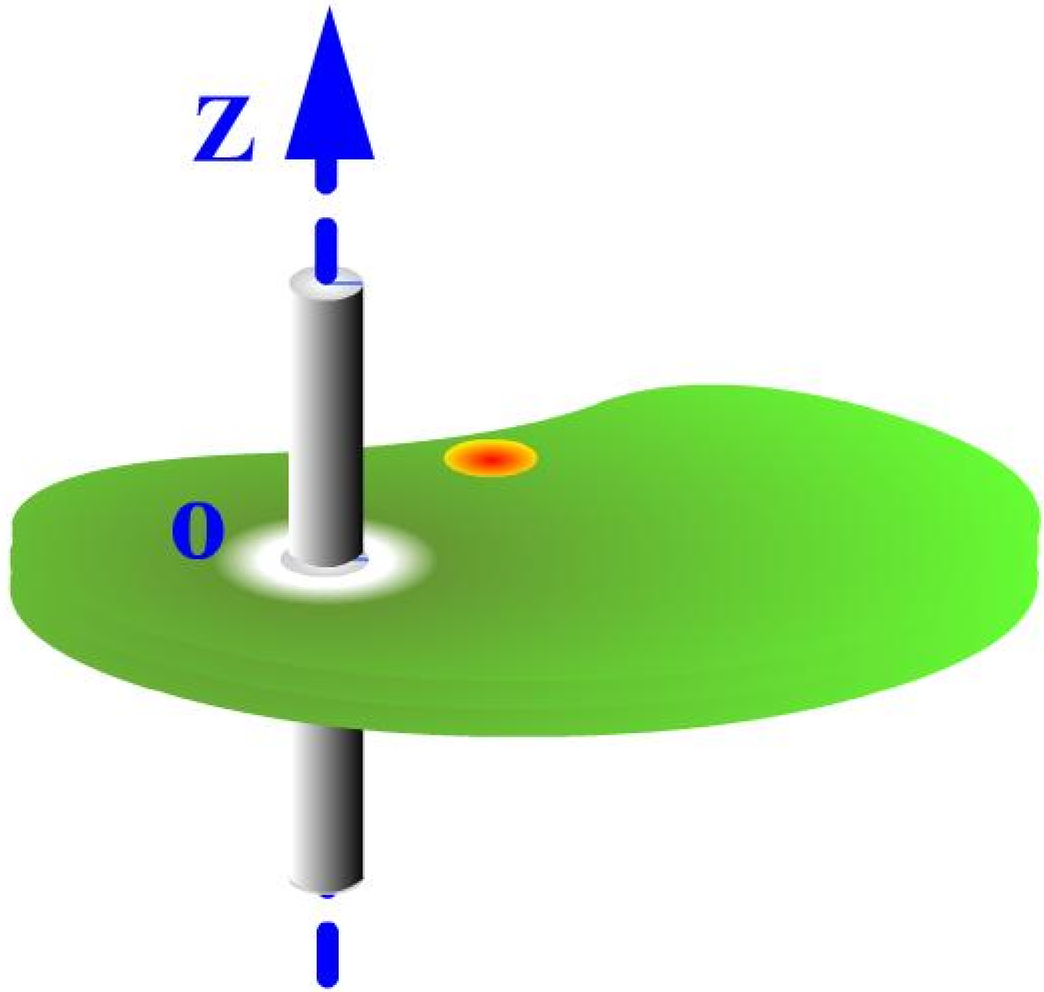
$$= F_{\tau} r$$

只有转动平面内的切向分力才对轴有力矩

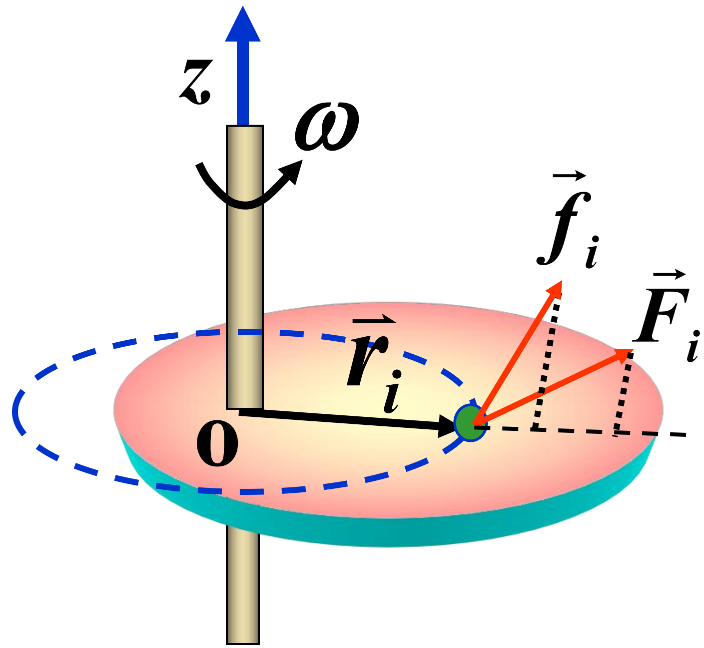


M的符号：

与z轴同向为正


z
o

二、定轴转动定律



对任一质点Δm_i:

$$\vec{F}_i + \vec{f}_i = \Delta m_i \vec{a}_i$$

$$F_{i\tau} + f_{i\tau} = \Delta m_i a_{i\tau} = \Delta m_i r_i \beta$$

$$\therefore \quad F_{i\tau} r_i + f_{i\tau} r_i = \Delta m_i r_i^2 \beta$$

所有质点: $\sum F_{i\tau} r_i + \sum f_{i\tau} r_i = (\sum \Delta m_i r_i^2)\beta$

$M_{合外力矩}$　内力矩之和=0

定义：转动惯量

$$J = \sum \Delta m_i r_i^2$$

$$\boxed{M = J\beta}$$

$$M = J\beta$$

转动惯量：$J = \sum \Delta m_i r_i^2$

定轴转动定律：

作用于定轴转动刚体上的合外力矩等于刚体对该轴的转动惯量与角加速度的乘积。

说明

（1）力矩的瞬时作用规律

（2）M, J是对同一轴而言

（3）J是物体转动惯性大小的量度

三、转动惯量

1. 定义 $J=\sum \Delta m_i r_i^2$

（1）由离散质点组成：$J=\sum m_i r_i^2$

一个质点：m $\quad J=mr^2$

（2）质量连续分布：

$$J=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i r_i^2=\int r^2\mathrm{d}m$$

讨论

决定转动惯量的因素：

（1）转轴位置

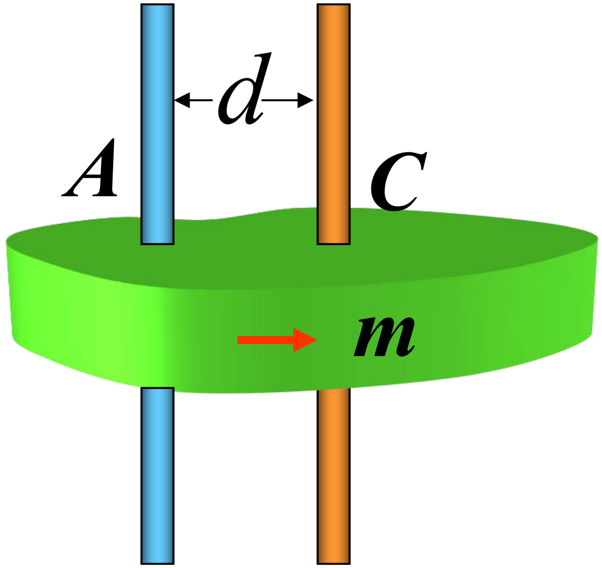
（2）刚体的总质量

（3）质量分布

一般由测量确定；对质量分布均匀、形状规则的刚体，J可计算得出。

2. 计算：

（1）利用定义：$J=\int r^2\mathrm{d}m$



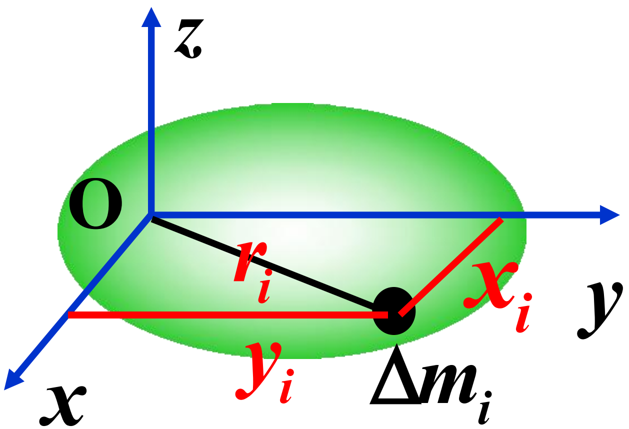
（2）平行轴定理：

J_C：对质心轴的转动惯量

$$J_A = J_C + md^2$$

（3）垂直轴定理：薄板刚体

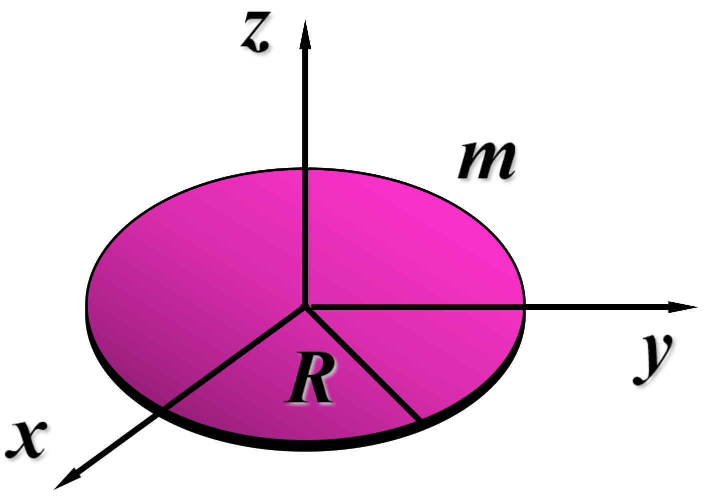
$$J_z=\sum \Delta m_i r_i^2$$
$$=\sum \Delta m_i (y_i^2+x_i^2)$$
$$=J_x+J_y$$



例：求对薄圆盘的一条直径的转动惯量。

已知圆盘 $J_z = \frac{1}{2} mR^2$

解：$J_z = J_x + J_y$

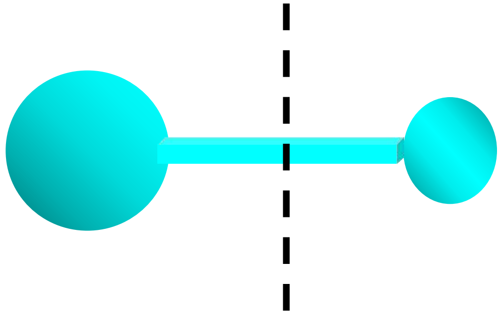


$$J_x = J_y = \frac{1}{2} J_z$$

$$= \frac{1}{4} mR^2$$

（4）转动惯量的叠加原理

由几部分组成的刚体，对轴的转动惯量等于各部分对同一轴转动惯量的代数和。

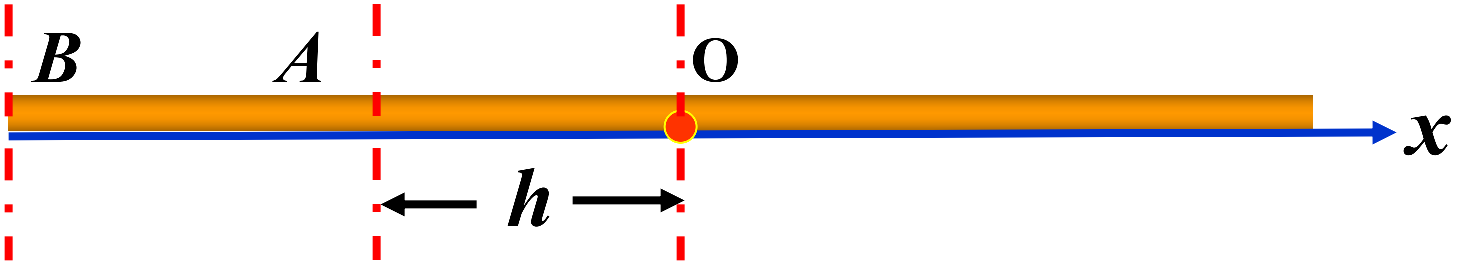


例：求质量为m,长为L的均匀细棒的转动惯量：

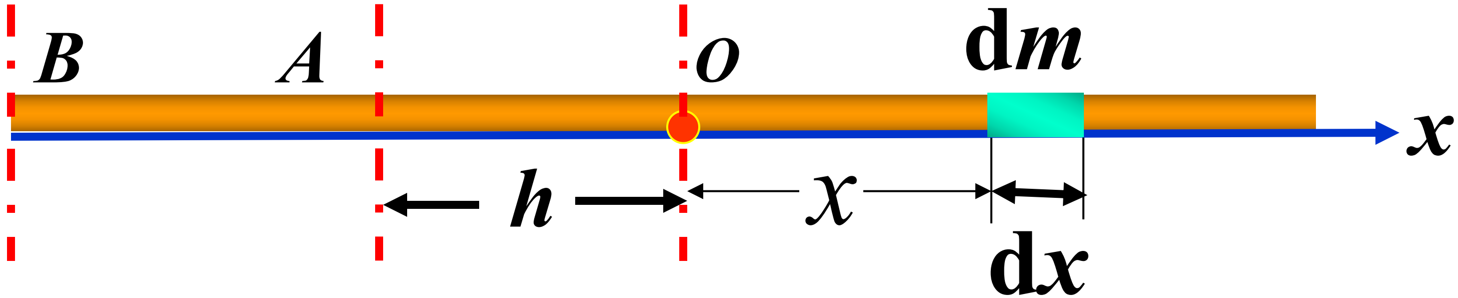
（1）转轴通过棒的中心O并与棒垂直

（2）通过棒的一端B并与棒垂直

（3）通过距中心为h的点A 并与棒垂直



解：以棒中心为原点建立坐标Ox



$$\mathrm{d}m=\lambda\mathrm{d}x=\frac{m}{L}\mathrm{d}x$$

（1） J_O：

$$J_O=\int r^2\mathrm{d}m=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}x^2\lambda\mathrm{d}x=\frac{1}{12}mL^2$$

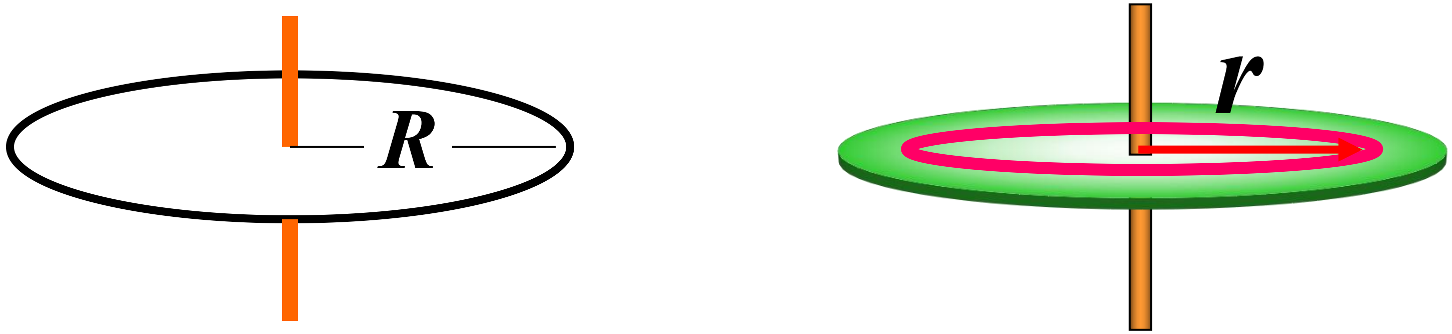
（2） J_B：

$$J_B=\int r^2\mathrm{d}m=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}(\frac{L}{2}+x)^2\mathrm{d}m=\frac{1}{3}mL^2$$

$$J_B=J_O+m(\frac{L}{2})^2$$

（3） J_A： $J_A=J_O+mh^2=\frac{1}{12}mL^2+mh^2$

例：半径为R、质量均匀分布的细圆环及薄圆盘，质量均为m，求对中垂轴的转动惯量。



（1）细圆环：

$$J=\int r^2\mathrm{d}m=R^2\int\mathrm{d}m=mR^2$$

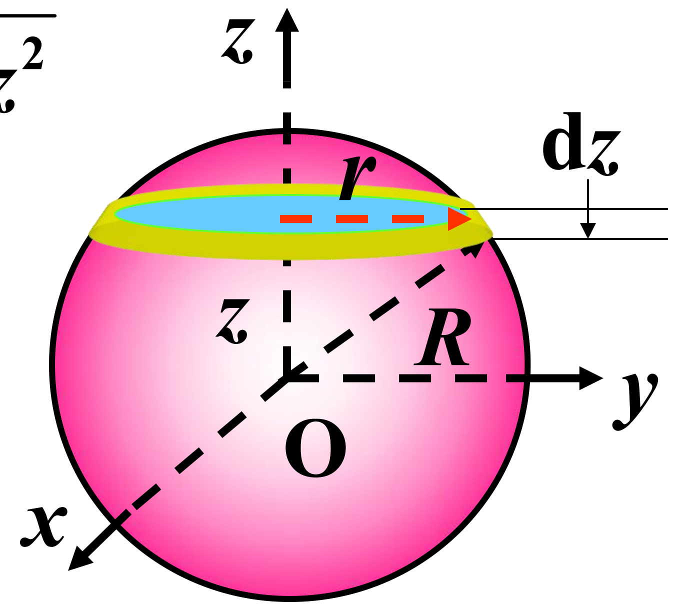
（2）薄圆盘：看作由许多宽为$\mathrm{d}r$的细圆环组成

$$\mathrm{d}m=\sigma\mathrm{d}s=\sigma 2\pi r\mathrm{d}r \qquad \mathrm{d}J=r^2\mathrm{d}m=2\pi\sigma r^3\mathrm{d}r$$

$$J=\int_0^R 2\pi\sigma r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{2}mR^2$$

例： 求均匀实心球（m）对过球心轴的转动惯量。

解： 球可看作由许多厚为dz的薄圆盘组成。



$$r = \sqrt{R^2 - z^2}$$

$$\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V$$

$$= \rho \pi r^2 \mathrm{d}z$$

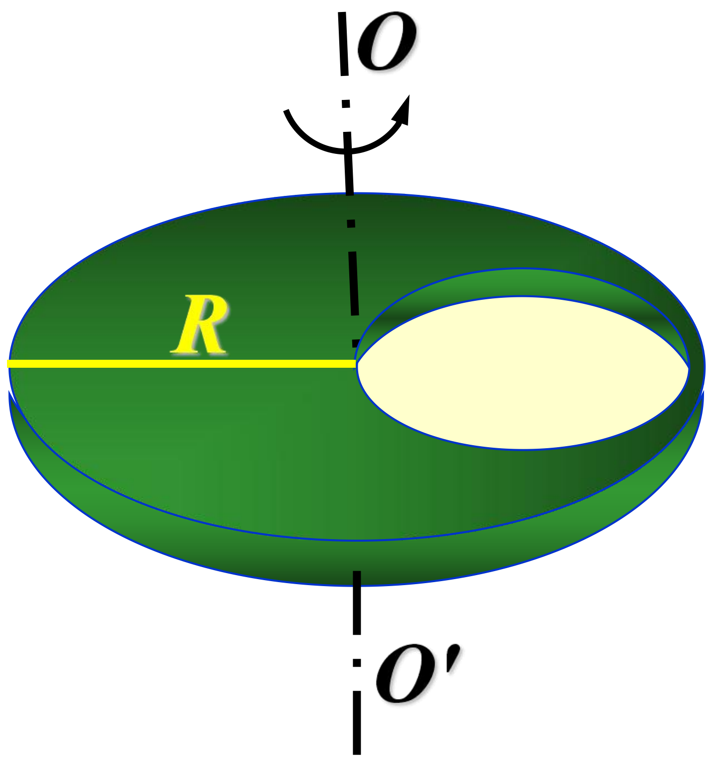
$$= \rho \pi (R^2 - z^2) \mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}J = \frac{1}{2} r^2 \mathrm{d}m$$

$$\therefore J = \int \mathrm{d}J = \int_{-R}^{R} \frac{1}{2} \rho \pi (R^2 - z^2)^2 \mathrm{d}z$$

$$= \frac{8}{15} \rho \pi R^5 = \frac{2}{5} m R^2 \qquad m = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

例：一半径为R的圆盘，挖去图示的一块小圆盘，剩余部分的质量为m，试求其对通过中心并垂直盘面的轴的转动惯量。



解：设未挖时的质量为m_0，挖掉部分的质量为m'，盘厚为h，体质量密度为ρ。由于

$$\frac{m'}{m_0}=\frac{\pi(\frac{R}{2})^2 h\rho}{\pi R^2 h\rho}=\frac{1}{4}$$

所以

$$m=m_0-m'=\frac{3}{4}m_0$$

$$m_0=\frac{4}{3}m,\quad m'=\frac{1}{3}m$$

根据平行轴定理，挖掉部分对OO'轴的转动惯量为

$$J' = \frac{1}{2}m'(\frac{R}{2})^2 + m'(\frac{R}{2})^2 = \frac{1}{8}mR^2$$

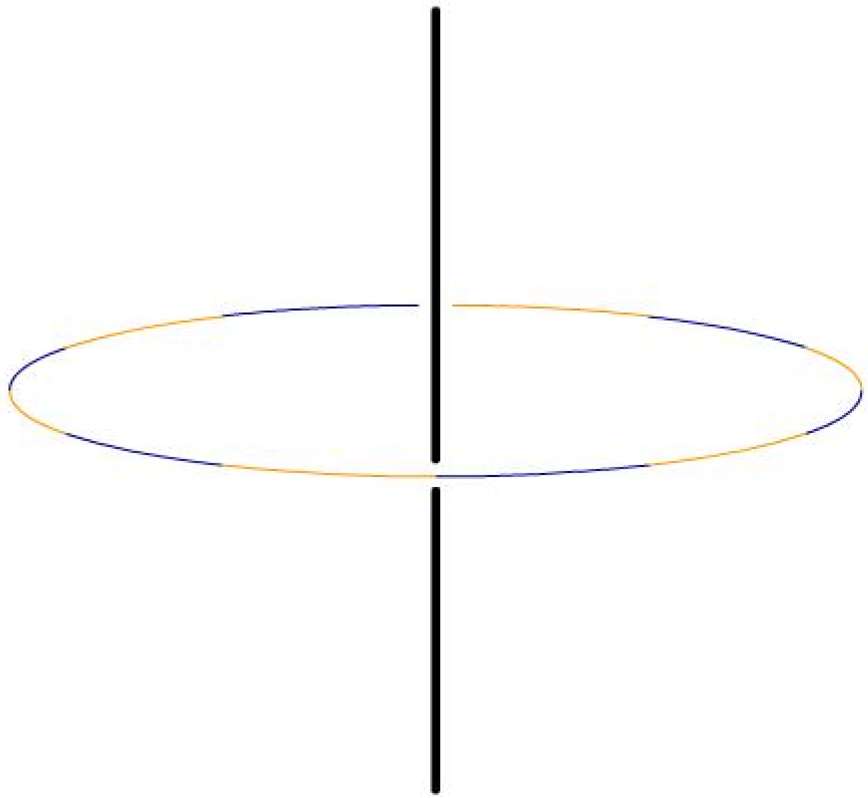
由转动惯量的相加性可得，剩余部分的转动惯量为

$$J = J_0 - J' = \frac{1}{2}m_0R^2 - \frac{1}{8}mR^2 = \frac{13}{24}mR^2$$

几种常见形状刚体的转动惯量

圆环转轴通过中心并与环面垂直

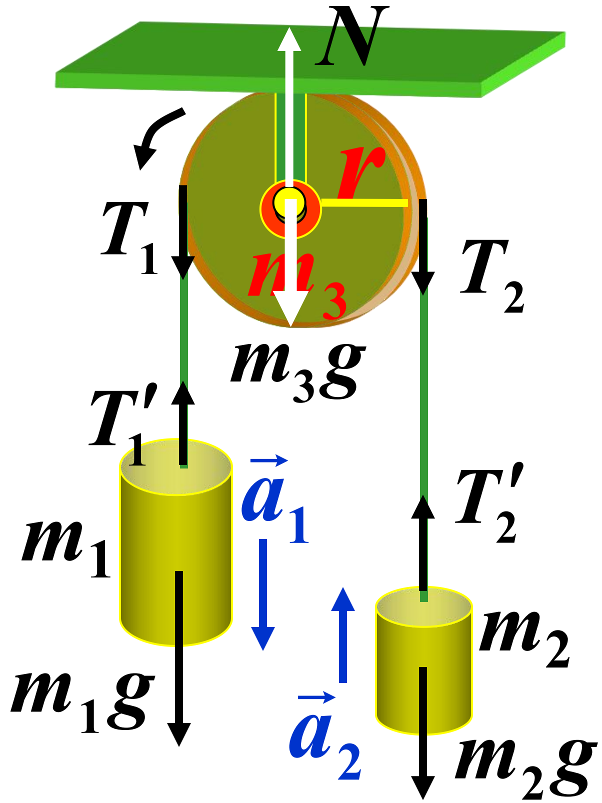
圆环



$J=mr^2$

例： 质量分别为m_1、m_2的物体通过轻绳挂在质量为m_3半径为r的圆盘形滑轮上。

求： m_1、m_2加速度及绳子张力。



解： $T_1 = T_1' \qquad T_2 = T_2'$

$$a_1 = a_2 \qquad J = \frac{1}{2} m_3 r^2$$

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \\ T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \\ T_1 r - T_2 r = J\beta \\ a_1 = a_2 = r\beta \end{cases}$$

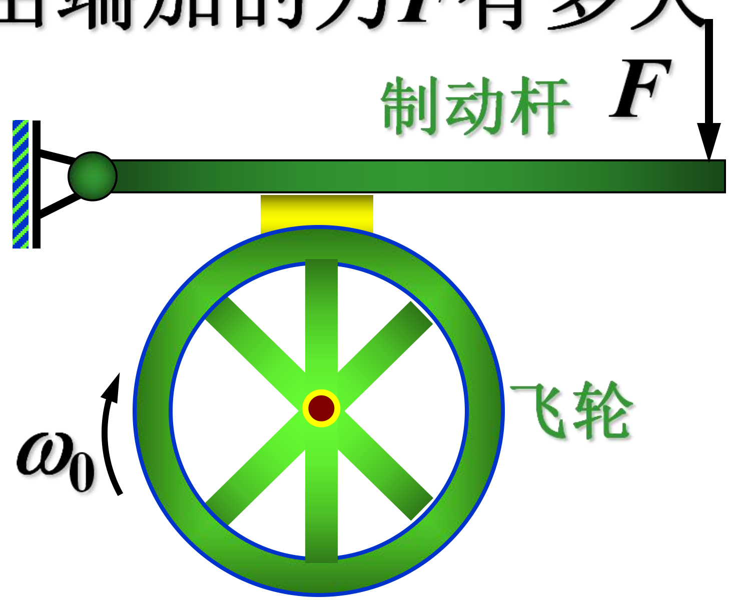
$$\therefore a_1 = a_2 = \frac{(m_1 - m_2) g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m_3}$$

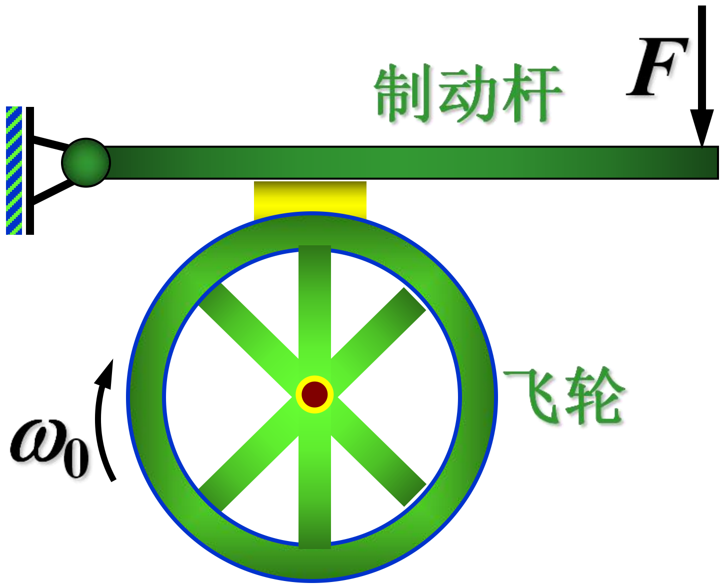
$$T_1 = \frac{2m_1m_2g + \frac{1}{2}m_1m_3g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_3} \qquad T_2 = \frac{2m_1m_2g + \frac{1}{2}m_2m_3g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_3}$$

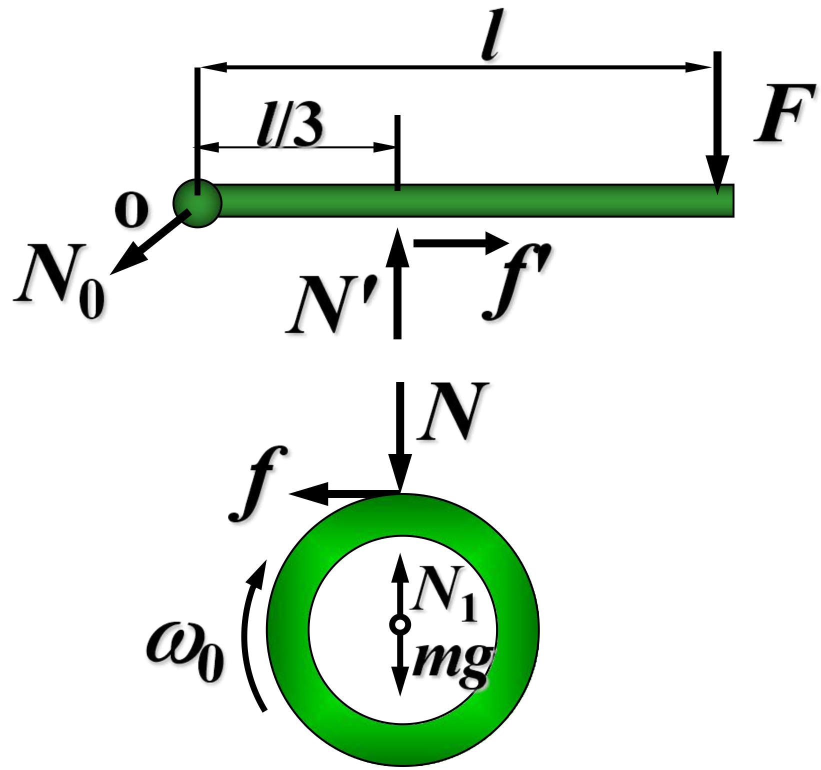
讨论 $m_3 = 0$：轻滑轮

$$\boxed{T_1 = T_2 = \frac{2m_1m_2g}{m_1 + m_2}}$$

例: 一飞轮的半径$R = 0.25\text{m}$，质量$m = 60\text{kg}$，此质量可近似的认为只分布在轮的边缘。飞轮以每分钟1000转的转速转动，已知飞轮与制动杆上的闸瓦间摩擦系数为$\mu = 0.4$，闸瓦到制动杆转轴O的距离为杆全长的1/3。制动杆及闸瓦质量不计。求在制动飞轮时，若要求在t =5.0s内使它均匀的减速而最后停止转动，则在制动杆自由端加的力F有多大？







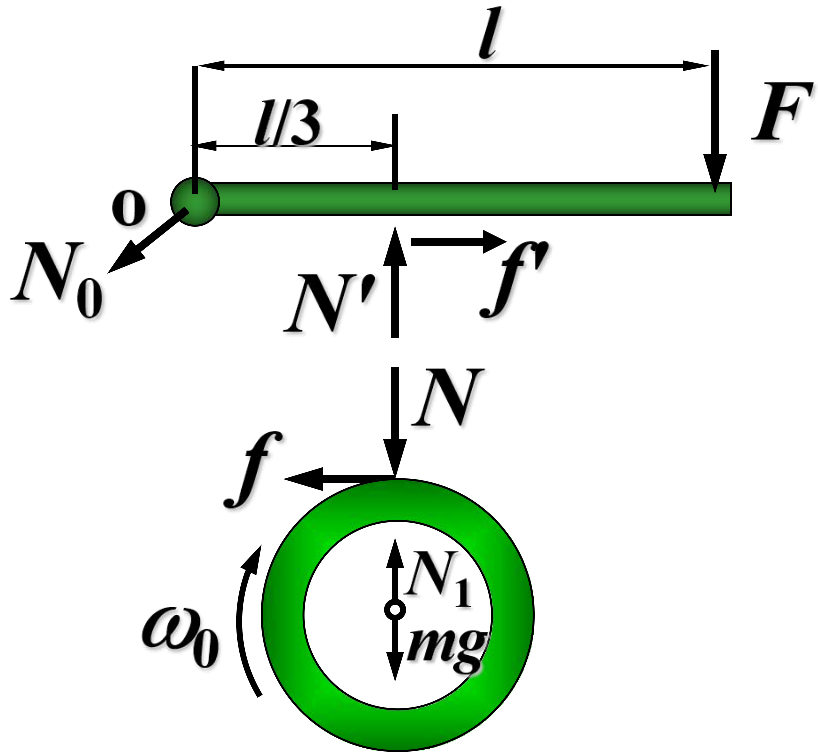
解： 飞轮初始角速度

$$\omega_0 = 2\pi n = 104.7 \text{ rad/s}$$

$$\omega = 0$$

$$\beta = \frac{\omega - \omega_0}{t} = -20.9 \text{ rad/s}^2$$

对于飞轮



$$f = \mu N$$

$$M_f = -fR = -\mu NR$$

$$-\mu NR = J\beta = mR^2\beta$$

$$N = -\frac{mR\beta}{\mu} = 784\ \mathrm{N}$$

对于制动杆

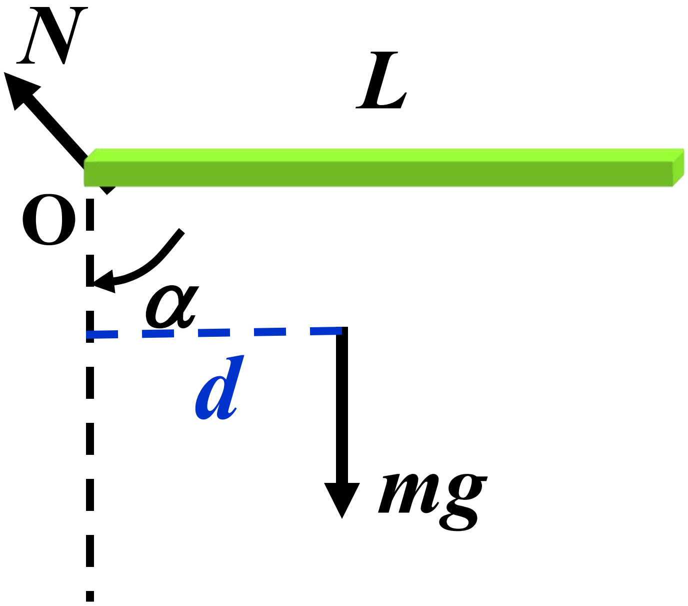
$$N' \cdot \frac{l}{3} = Fl \qquad F = \frac{N'}{3} \approx 261\ \mathrm{N}$$

例： 细杆质量为m，长为L，可绕水平光滑轴O在竖直平面内转动，自水平静止释放。

求：（1）杆与铅直方向成α角时的β;

（2）杆过铅直位置时的ω。

解：（1）$J=\frac{1}{3}mL^2$

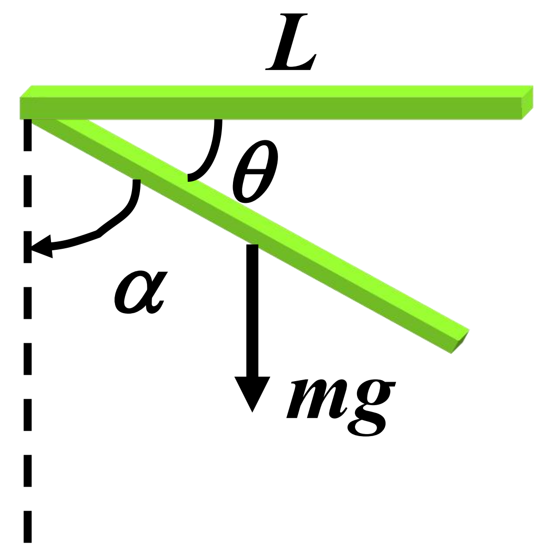


$$M=mg\frac{L}{2}\sin\alpha$$

$$\therefore\ \beta=\frac{3g}{2L}\sin\alpha$$

$$M=mgd$$

（2）$\beta = \dfrac{3g}{2L}\sin\alpha = \dfrac{3g}{2L}\cos\theta$



$$= \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

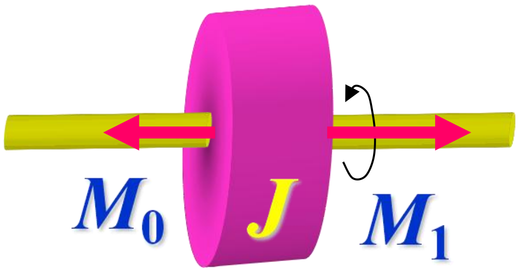
$$= \omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

$$\therefore \quad \omega\,d\omega = \frac{3g}{2L}\cos\theta\,d\theta$$

$$\int_0^{\omega_\perp}\omega\,d\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3g}{2L}\cos\theta\,d\theta \qquad \therefore \omega_\perp = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

例：静止刚体受到力矩M_0的作用，同时引起一阻力矩M_1，M_1与转动角速度成正比，刚体对转轴的转动惯量为J。

求：角速度变化规律。



解：

$$M_0 + M_1 = J\beta = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$$M_1 = -k\omega$$

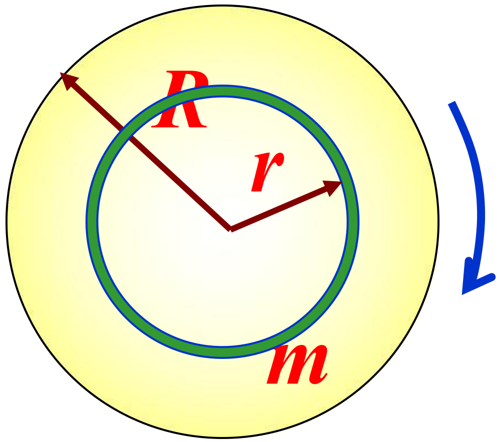
$$\therefore M_0 - k\omega = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

分离变量：$$\frac{\mathrm{d}\omega}{M_0 - k\omega} = \frac{\mathrm{d}t}{J}$$

$$\int_0^{\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{M_0 - k\omega} = \int_0^{t}\frac{\mathrm{d}t}{J} \Rightarrow \omega = \frac{1}{k}(M_0 - e^{-\frac{kt}{J}})$$

例：质量m的圆盘半径为R，绕中心旋转，与桌面的摩擦系数为μ。

求：圆盘从ω_0到静止所需要的时间 t。



解：$M_f = J\beta = J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \quad J = \dfrac{1}{2}mR^2$

取半径为r、宽为$\mathrm{d}r$ 的圆环：

$$\mathrm{d}M_f = -[\mu(\mathrm{d}m)g]r$$

$$\mathrm{d}m = \sigma 2\pi r \mathrm{d}r$$

$$\therefore M_f = \int_m \mathrm{d}M_f = -\int_0^R \mu \cdot \sigma 2\pi r^2 g \mathrm{d}r = -\frac{2}{3}\mu m g R$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{M_f}{J} = -\frac{4\mu g}{3R} \qquad \therefore \ t = \frac{3R\omega_0}{4\mu g}$$

§ 4.3 角动量与角动量守恒定律

力的时间累积效应：

→ 冲量、动量、动量定理

力矩的时间累积效应：

→ 冲量矩、角动量、角动量定理

$\mathrm{d}t$ ： $\vec{M}\mathrm{d}t$ Δt： $\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\mathrm{d}t$

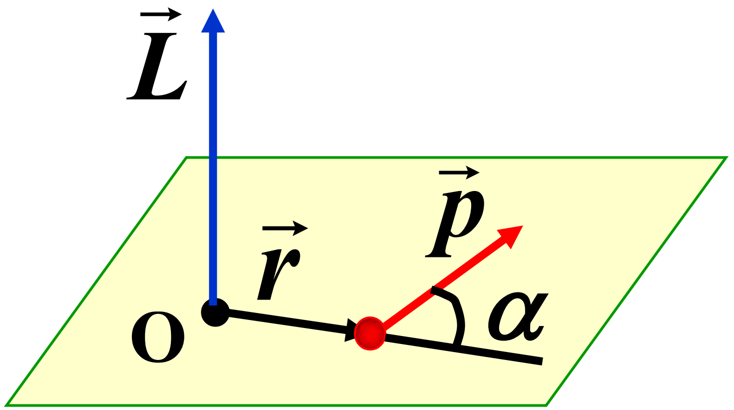
一、角动量

定义：质点对o点的角动量

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times(m\vec{v})$$

大小：$L=rmv\sin\alpha$

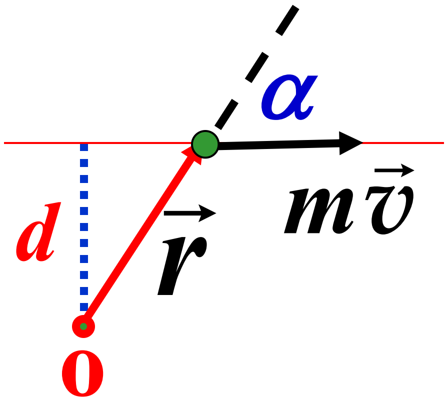
方向：右手螺旋法则确定



注意 $\vec{L}$ 与O点的选取有关

圆周运动：相对圆心 $L=rmv$

直线运动：$L=rmv\sin\alpha=mvd$



刚体对定轴的角动量

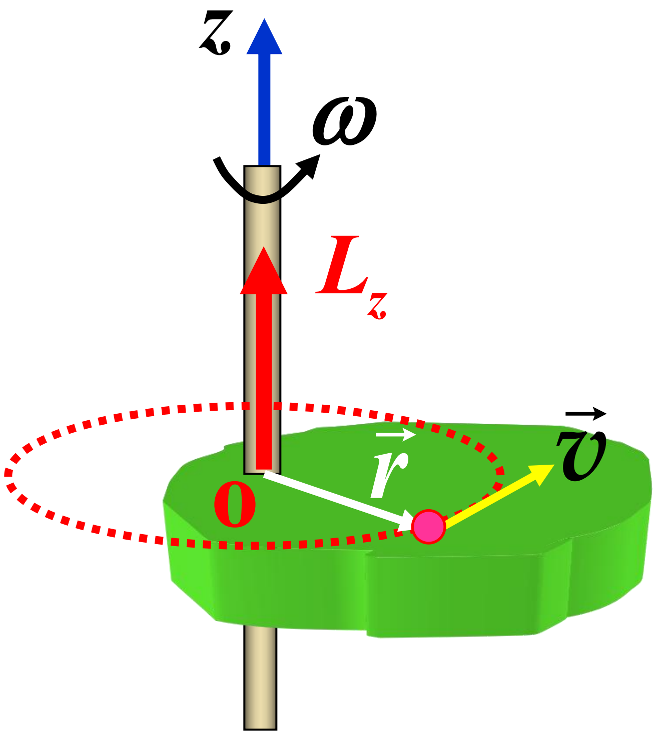
$$\Delta m_i: \quad L_{iz} = \Delta m_i r_i v_i$$

$$= \Delta m_i r_i^2 \omega$$

$$L_z = \sum L_{iz} = \sum \Delta m_i r_i^2 \omega$$

$$= (\sum \Delta m_i r_i^2)\omega$$

$$= J\omega$$



***L*的符号：**与z轴同向为正

二、角动量定理

1. 质点的角动量定理

$$\vec{M}\mathrm{d}t = \vec{r}\times\vec{F}_{合}\mathrm{d}t = \vec{r}\times\mathrm{d}(m\vec{v})$$

$$= \mathrm{d}(\vec{r}\times m\vec{v}) = \mathrm{d}\vec{L}$$

$$\boxed{\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$$

$\vec{M}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{L}$ —— 微分形式

$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t = \int_{\vec{L}_1}^{\vec{L}_2}\mathrm{d}\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$ —— 积分形式

作用于质点的合力矩的冲量矩等于在同一段时间内质点角动量的增量。

2. 质点系的角动量定理

内力矩之和 = 0

内力矩的冲量矩 = 0

$$\vec{M}_{合外}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{L}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}_{合外}\mathrm{d}t = \int_{\vec{L}_1}^{\vec{L}_2}\mathrm{d}\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$$

3. 定轴转动刚体的角动量定理

$$M\mathrm{d}t = J\beta\,\mathrm{d}t = J\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(J\omega) = \mathrm{d}L$$

$$\therefore \quad M\mathrm{d}t = \mathrm{d}L$$

$$\int_{t_1}^{t_2} M\mathrm{d}t = \int_{L_1}^{L_2} \mathrm{d}L = L_2 - L_1 = J\omega_2 - J\omega_1$$

说明

（1）M、L、J是对同一轴而言；

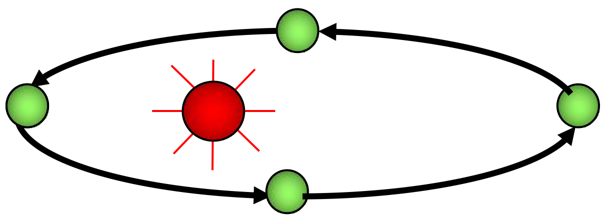
（2）标量式，注意正负。

三、角动量守恒定律

若：$\vec{M}=0$ 则：$\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=0$ $\vec{L}=$常矢量

说明

（1）有心力：

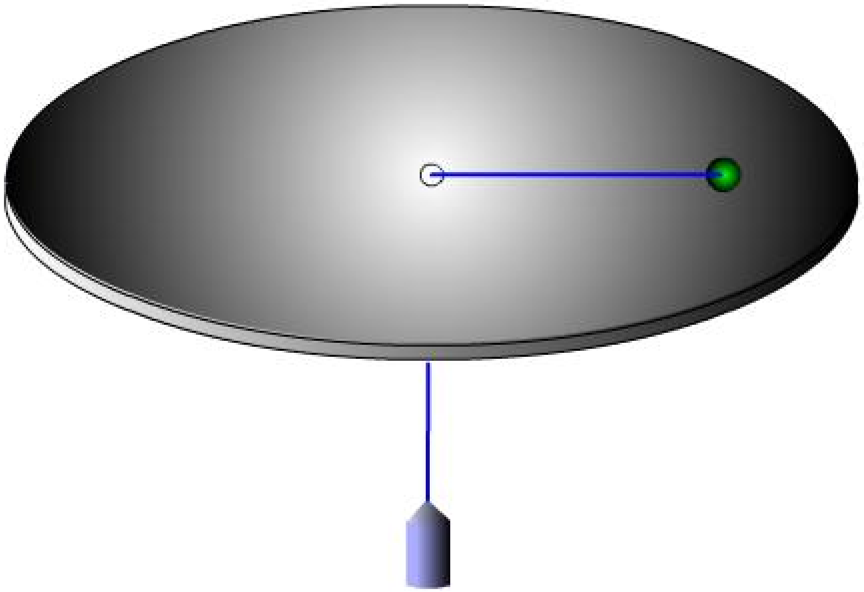


有心力对力心的力矩恒为0。

仅受有心力作用的物体对力心的角动量守恒；

（2）是自然界的普适规律之一。

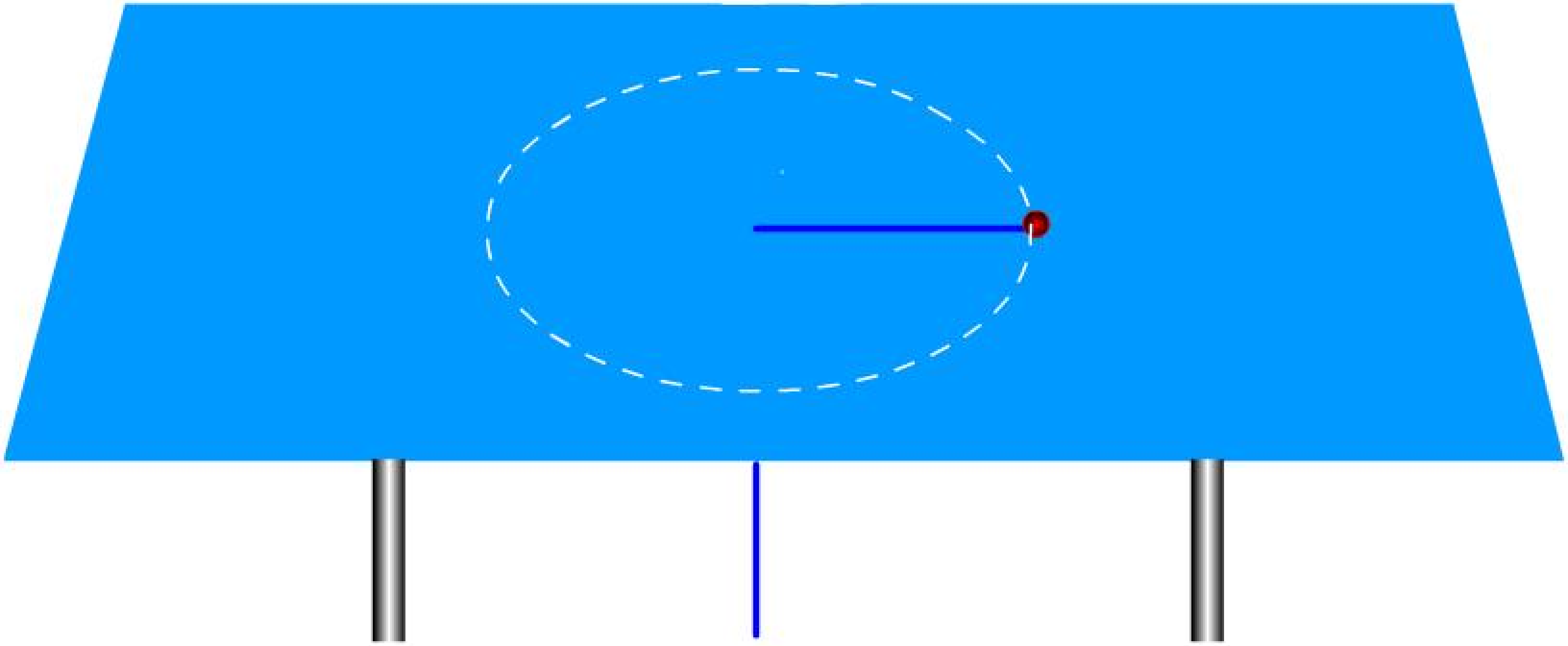
角动量守恒



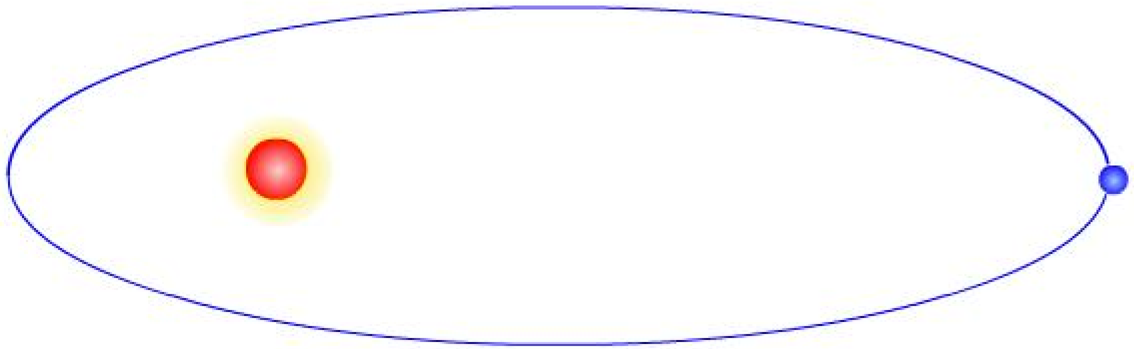
$$mr^2\omega = \text{常量}$$

角动量守恒

$J\omega$=恒量



例： 证明开普勒第二定律（ 行星对太阳的位矢在相等的时间内扫过相等的面积）。



开普勒三定律

第一定律（轨道定律）：

每一行星沿一个椭圆轨道环绕太阳，而太阳则处在椭圆的一个焦点中。

第二定律（面积定律）：

从太阳到行星所联接的直线在相等时间内扫过同等的面积。

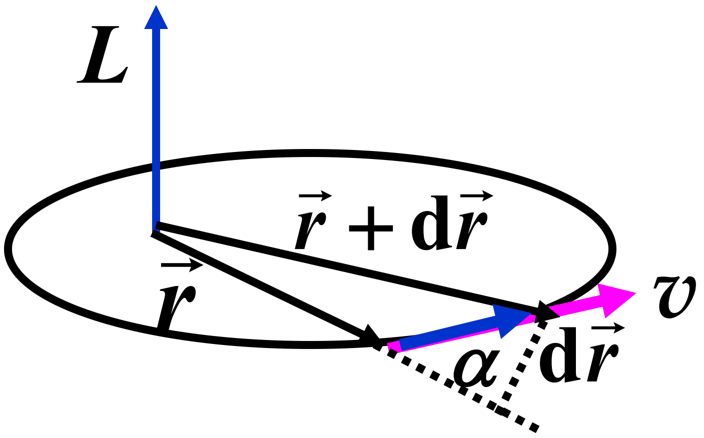
第三定律（周期定律）：

所有的行星的轨道的半长轴的三次方跟公转周期的二次方的比值都相等。

解： $\mathrm{d}t:\ \mathrm{d}A=\frac{1}{2}r|\mathrm{d}\vec{r}|\sin\alpha=\frac{1}{2}r\mathrm{d}s\sin\alpha$

单位时间：

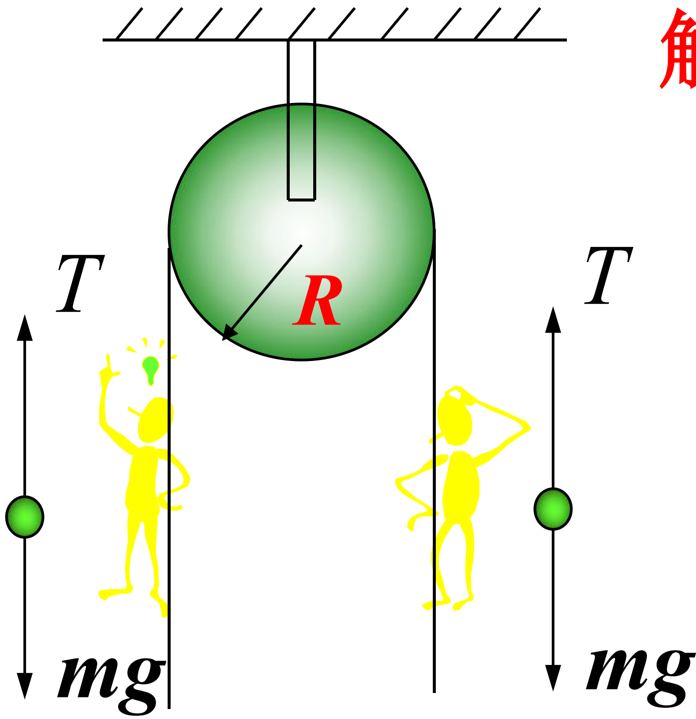
$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\frac{r\mathrm{d}s\sin\alpha}{\mathrm{d}t}$$



$$=\frac{1}{2}rv\sin\alpha=\frac{mvr\sin\alpha}{2m}=\frac{L}{2m}$$

有心力作用，行星对太阳中心的L不变。

例： 一轻绳绕过一质量可以不计且轴光滑的滑轮，质量皆为m的甲、乙二人分别抓住绳的两端从同一高度静止开始加速上爬，甲相对绳的速度为u,乙相对绳子的速度为$u/2$，那么两人的速度各是多少，谁先到达顶点？



解：法1：运用牛顿定理

$$T - mg = ma$$

$$\therefore \quad v = v_0 + \int_0^t a\mathrm{d}t$$

两者任一时刻加速度相同，速度相同，同时到达顶点。

法2：运用角动量守恒定理

以两人、绳子和滑轮为系统

$$Rmv_{甲} - Rmv_{乙} = 0 \quad \therefore v_{甲} = v_{乙}$$

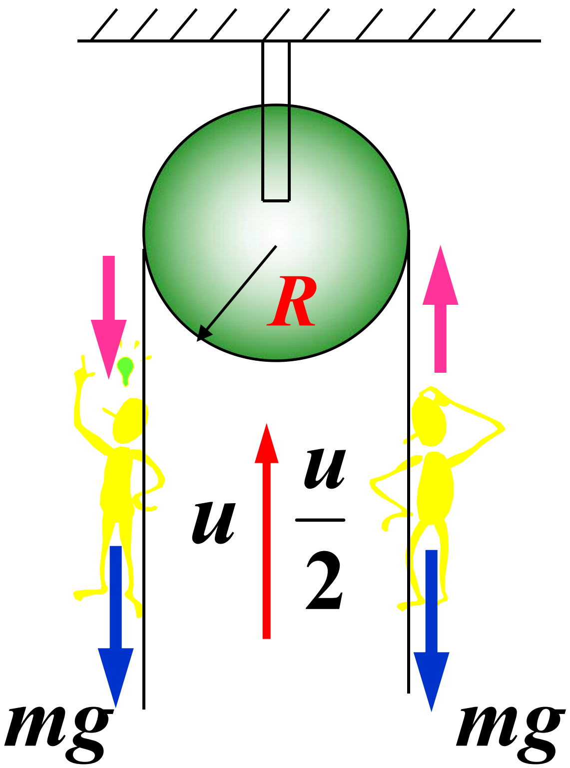
$$\therefore v_{甲} = u - v_{绳}$$

$$v_{乙} = \frac{u}{2} + v_{绳}$$

$$\therefore u - v_{绳} = \frac{u}{2} + v_{绳}$$

$$\Rightarrow v_{绳} = \frac{u}{4}$$

$$\therefore v_{甲} = v_{乙} = \frac{3}{4}u$$



定轴转动刚体的角动量守恒定律

若：$M=0$　则：$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=0$　$L=J\omega=$常量

说明

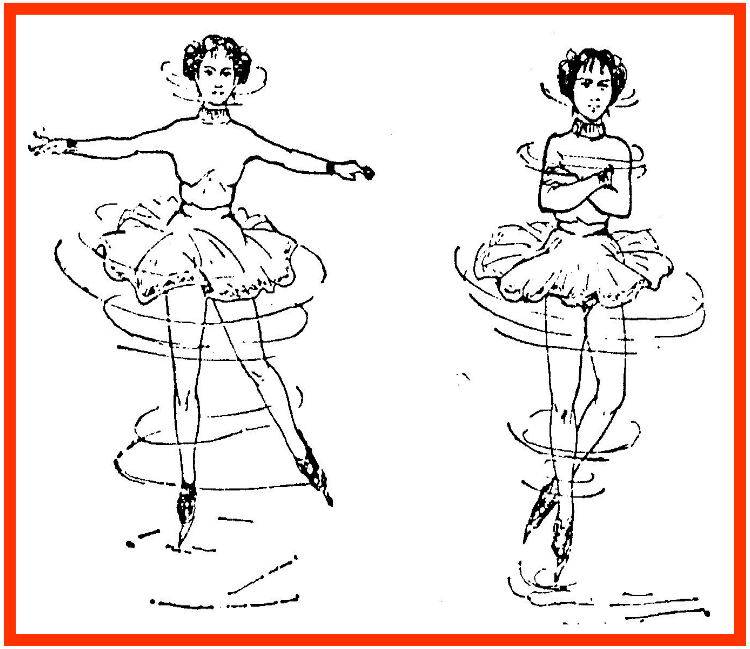
（1）几种情况：

① J 不变：刚体

ω 也不变　匀速转动

② J 变：非刚体

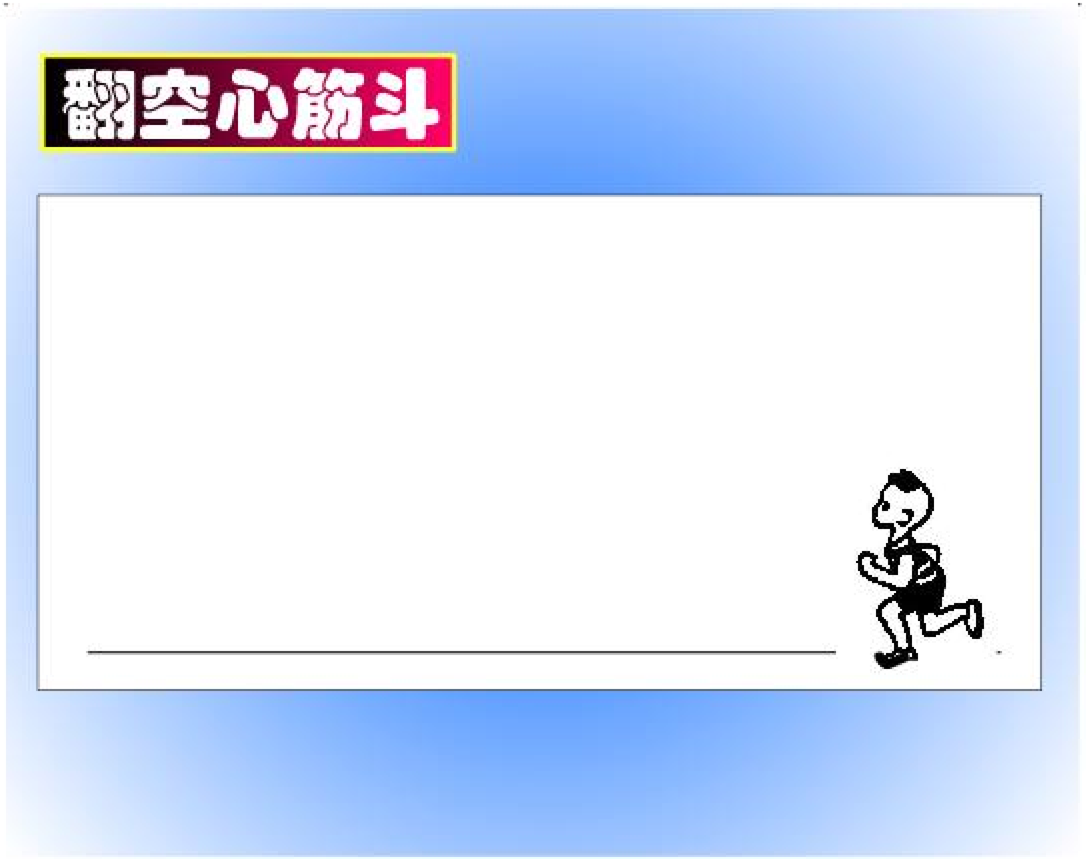
ω 也变　$J_1\omega_1=J_2\omega_2$



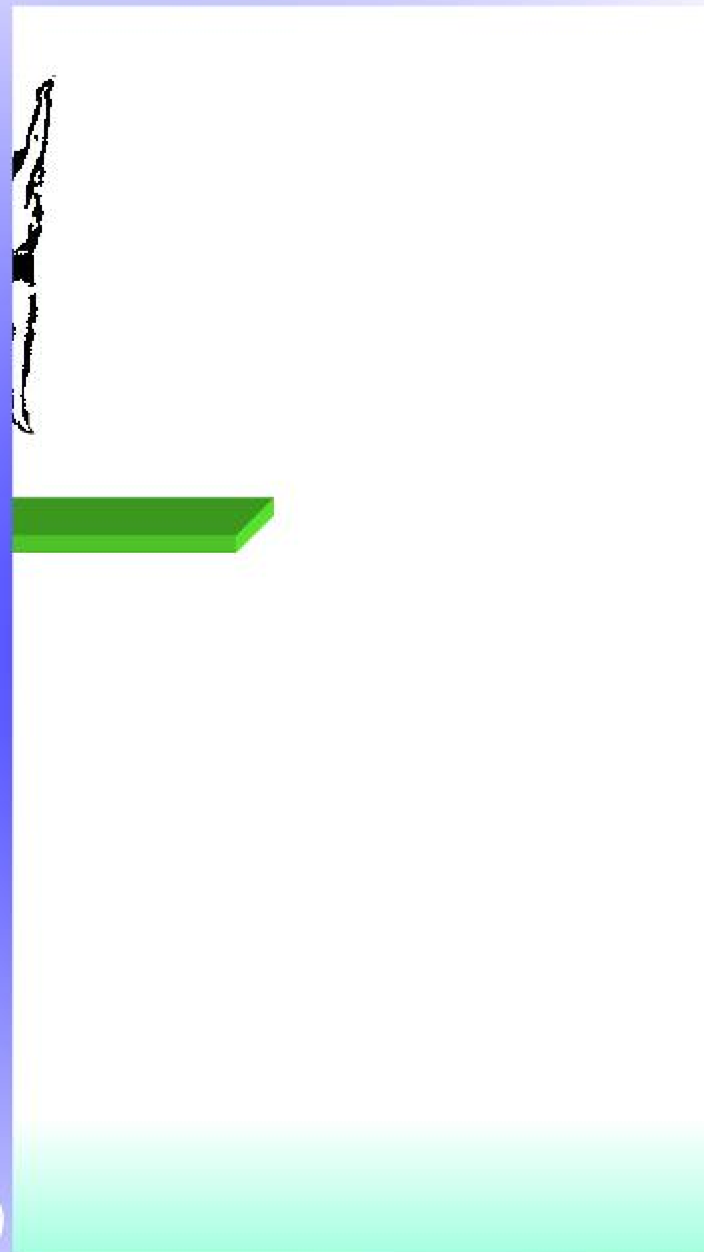

可拖动

（2）对通过质心轴的转动也成立。

作用于刚体的外力，对通过质心轴的合外力矩恒为零时，对该轴的角动量守恒。



跳台跳水



直升机：{ 单旋翼 —— 旋翼＋尾桨
双旋翼

装置尾桨推动大气产生克服机身反转的力矩

“阿帕奇”先进攻击直升机

“铺路洼”特种作战直升机

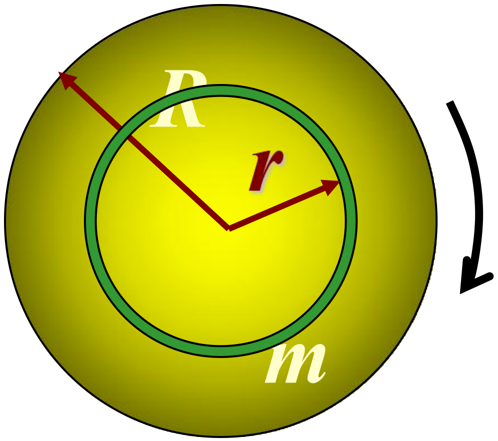
装置反向转动的双旋翼产生反向角动量而相互抵消

俄卡-28双旋翼反潜直升机

美CH-46E“海骑士” 运输直升机

例：质量m的圆盘半径为R，绕中心旋转，与桌面的摩擦系数为μ。试用角动量定理求圆盘从ω_0到静止所需要的时间 t。

解：由前面例题已算出圆盘所受合外力矩为：



$$M_f = -\frac{2}{3}\mu m g R$$

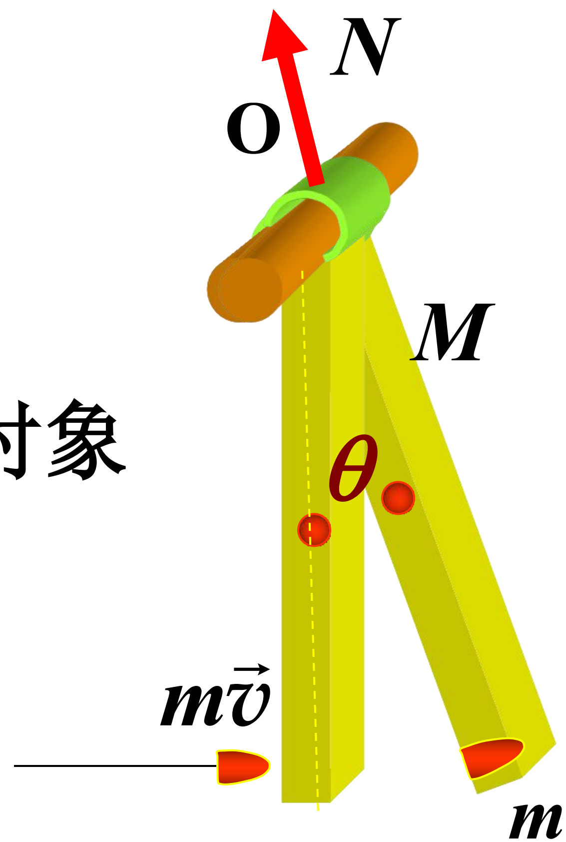
由角动量定理：

$$\int_0^t M\mathrm{d}t = Mt = J\omega - J\omega_0$$

$$\because \omega = 0 \qquad \therefore \ t = \frac{-J\omega_0}{M} = \frac{3R\omega_0}{4\mu g}$$

例：杆：l、M、无摩擦转动；子弹：m、v 从底端水平射入停在杆内；

求：杆偏转的最大角度θ。



解：碰撞：M、m为研究对象

角动量守恒

转动：M、m、地球研究对象

机械能守恒

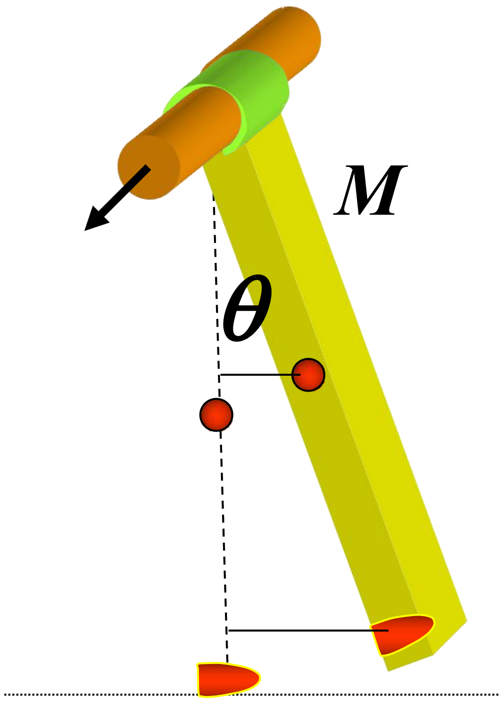
子弹射入之前：$L_1 = mlv$

子弹射入之后：

$$L_2 = \frac{1}{3}Ml^2\omega + ml^2\omega = J\omega = (\frac{1}{3}Ml^2 + ml^2)\omega$$

$$\therefore \ mlv = (\frac{1}{3}Ml^2 + ml^2)\omega \Rightarrow \ \omega = \frac{mv}{(\frac{1}{3}M + m)l}$$

以杆端为势能零点



$$E_1 = \frac{1}{2}J\omega^2 + Mg\frac{l}{2}$$

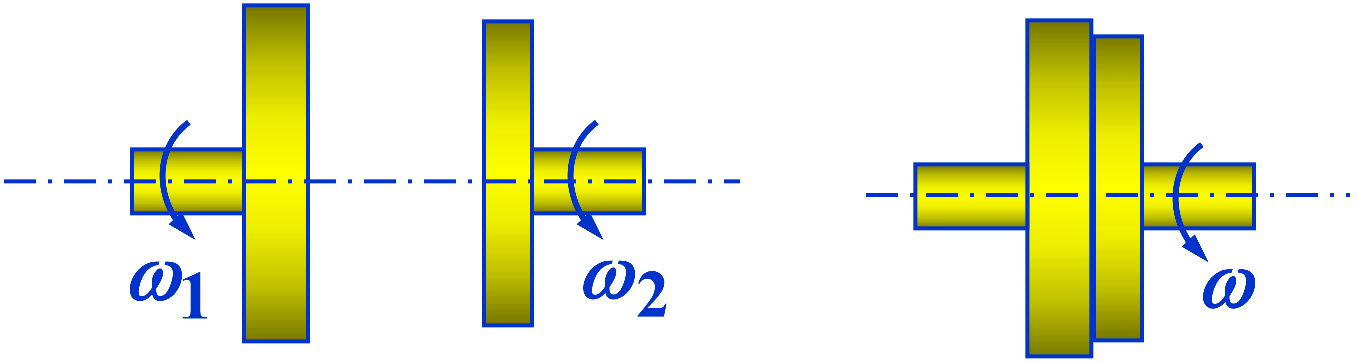
$$E_2 = 0 + Mg\left(l - \frac{l}{2}\cos\theta\right)$$

$$+ mg(l - l\cos\theta)$$

$$E_1 = E_2 \qquad \therefore 1 - \cos\theta = \frac{J\omega^2}{(M+m)gl}$$

$$\theta = \arccos\left[1 - \frac{3m^2v^2}{(M+3m)(M+2m)gl}\right]$$

例：两个共轴飞轮转动惯量分别为J_1、J_2，角速度分别为ω_1 、 ω_2，求两飞轮啮合后共同的角速度ω。啮合过程机械能损失。



解：两飞轮通过摩擦达到共同速度, 合外力矩为0，系统角动量守恒。

$$L_0 = L = C$$

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = (J_1 + J_2)\omega$$

共同角速度 $\omega = \dfrac{J_1\omega_1 + J_2\omega_2}{J_1 + J_2}$

啮合过程机械能损失 $\Delta E = E - E_0$

$$\Delta E = \frac{1}{2}(J_1 + J_2)\omega^2 - (\frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2)$$

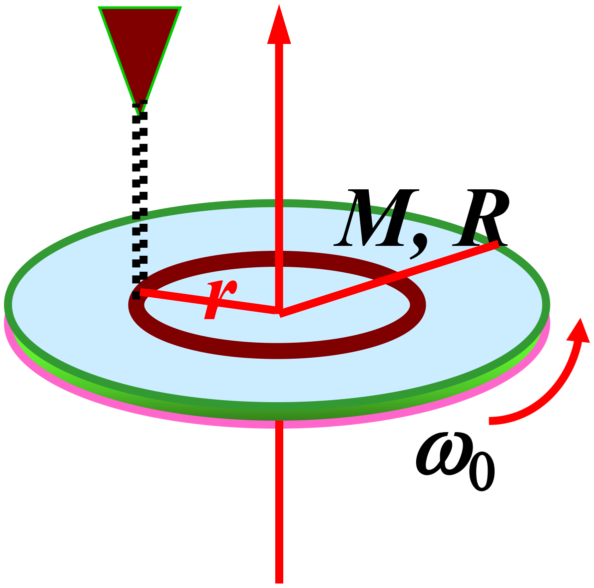
其中 $\omega = \dfrac{J_1\omega_1 + J_2\omega_2}{J_1 + J_2}$

$$\Delta E = -\frac{J_1 J_2(\omega_1 - \omega_2)^2}{2(J_1 + J_2)}$$

例：圆盘: M， R， ω_0； 沙子：r，

漏沙速率 $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=k$

求：多长时间角速度变为$\omega_0/2$。



解：角动量守恒

$$J_{盘}\omega_0=(J_{盘}+J_{沙})\frac{\omega_0}{2}$$

$$J_{盘}=\frac{1}{2}MR^2$$

$$J_{沙}=m(t)r^2=ktr^2$$

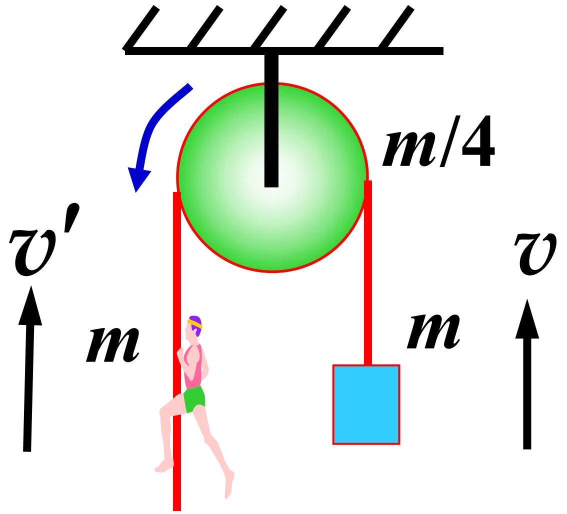
解得： $t=\dfrac{M}{2k}\dfrac{R^2}{r^2}$

例： 滑轮：$m/4$、R； 物体：m；人：m。

求： 人由静止相对绳匀速u上爬时，物体的速度。

解： 以人、滑轮和物体为系统

对滑轮轴的合外力矩：



$$M = mgR - mgR = 0$$

角动量守恒

$$L = mvR + \left(\frac{1}{2}\frac{m}{4}R^2\right)\omega - mv'R = 0$$

$$v' = u - v \qquad \omega = \frac{v}{R} \qquad \therefore v = \frac{8}{17}u$$

§ 4.4　定轴转动中的功能关系

力对空间累积效应：

力的功、动能、动能定理.

力矩对空间累积效应：

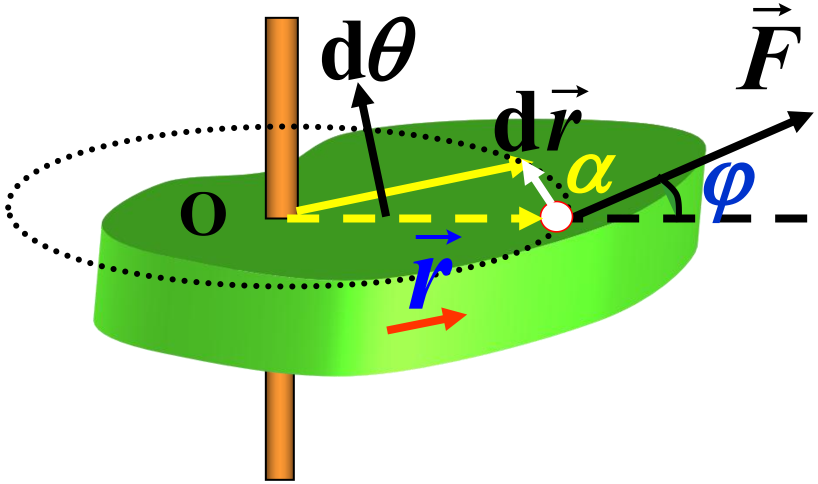
→ 力矩的功、转动动能、动能定理.

一、力矩的功

$\vec{F}$在转动平面内

$\mathrm{d}t$：刚体角位移为$\mathrm{d}\theta$

质点元位移为$\mathrm{d}\vec{r}$



元功：

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= F\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos\alpha$$

$\mathrm{d}s = r\mathrm{d}\theta$

$$= F\mathrm{d}s\cos\alpha$$

$\cos\alpha = \sin\varphi$

$$= Fr\sin\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$= M\mathrm{d}\theta$$

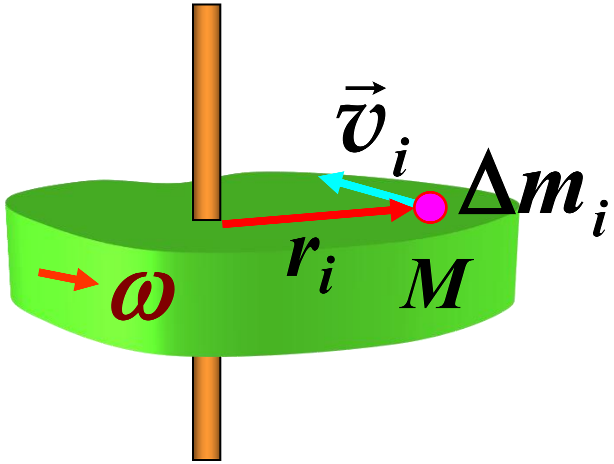
$\theta_1 \to \theta_2$：

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta$$

二、转动动能

$$\Delta m_i: \ E_{ki} = \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2$$

$$= \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2 \omega^2$$



$$\therefore E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2 \omega^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}J\omega^2$$

三、转动的动能定理

$$A_{外力}+A_{内力}=E_{k2}-E_{k1}$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta \qquad 内力功=0 \qquad \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$\boxed{\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2}$$

四、刚体的重力势能

$$E_{\mathrm{p}} = \sum_i \Delta m_i g h_i = m \frac{\sum_i \Delta m_i h_i}{m} g = m g h_{\mathrm{c}}$$

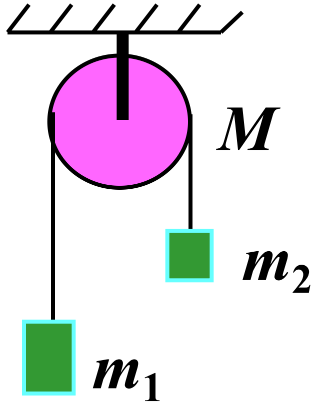
h_{c} 为刚体质心的高度

结论 刚体的重力势能，等于把刚体的全部质量集中于质心时质心的势能。

定轴转动刚体的机械能：

$$\boxed{E_{\text{机械}} = m g h_{\mathrm{c}} + \frac{1}{2} J \omega^2}$$

五、功能原理和机械能守恒定律



体系中包含做定轴转动的刚体和平动的物体

1. 动能定理：

$$A_{外} + A_{内} = (E_{k平2} + E_{k转2}) - (E_{k平1} + E_{k转1})$$

2. 功能原理：

$$A_{外} + A_{非保内} = E_2 - E_1$$

$$\boxed{E = E_{k平} + E_{k转} + E_p}$$

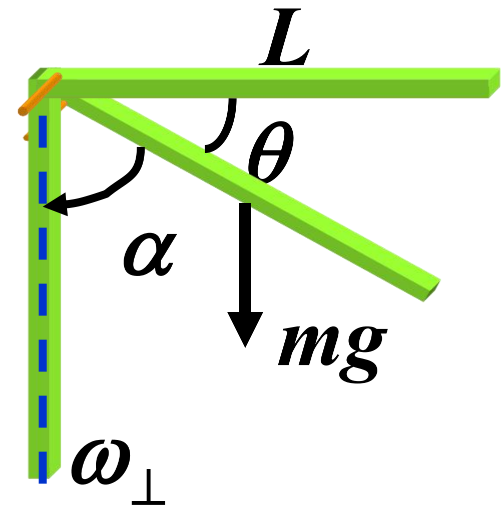
3. 机械能守恒定律：

只有保守内力做功

则： $E_1 = E_2 =$ 常量

求：杆过铅直位置时的ω。

解：法1：动能定理



$$M = mg\frac{L}{2}\sin\alpha = mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

$$A_{重力矩} = \int_0^{\pi/2} M\mathrm{d}\theta$$

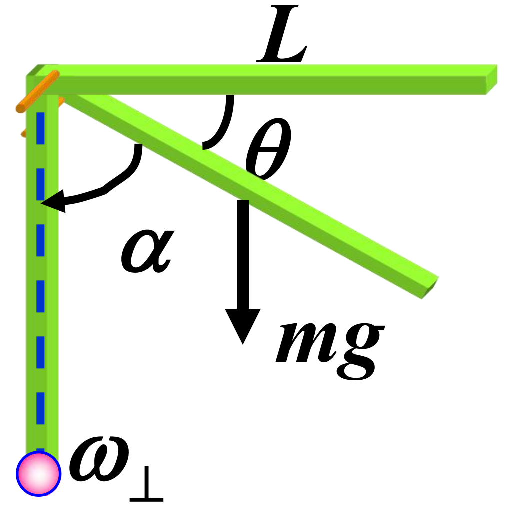
$$= \int_0^{\pi/2} mg\frac{L}{2}\cos\theta\mathrm{d}\theta = mg\frac{L}{2}$$

重力矩的功（重力对刚体做功）等于重力势能增量的负值。

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}J\omega_\perp^2 - 0 \qquad \therefore \omega_\perp = \sqrt{\frac{mgL}{J}}$$

法2：以细杆、转轴和地球为系统

机械能守恒



取水平位置为势能零点

水平位置：$E_{k1} = E_{p1} = 0$

竖直位置：$E_{k2} = \frac{1}{2} J\omega_\perp^2 \qquad E_{p2} = -mg\frac{L}{2}$

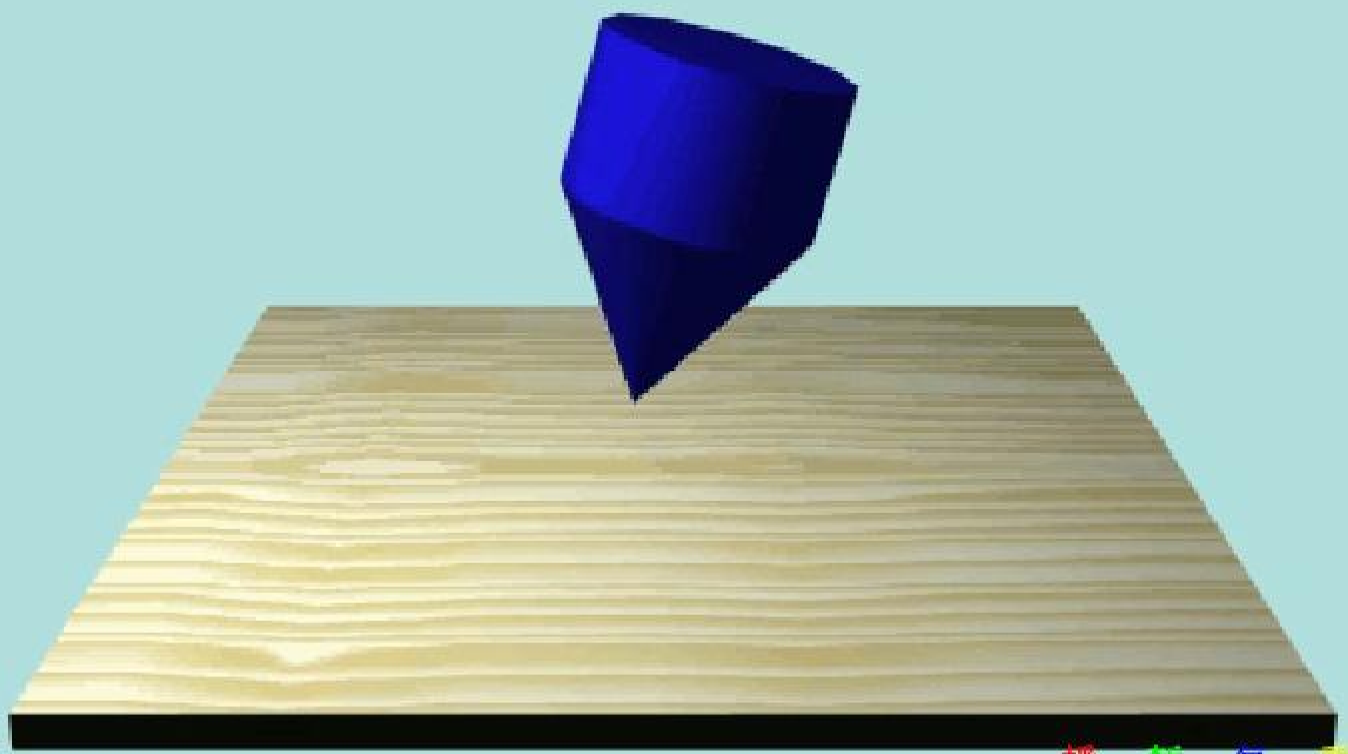
由机械能守恒：$E_{k2} + E_{p2} = 0$

讨论 如杆端连一质量为m_0的小球

$$\frac{1}{2}J\omega_\perp^2 + \frac{1}{2}m_0(L\omega_\perp)^2 - \frac{1}{2}mgL - m_0 gL = 0$$

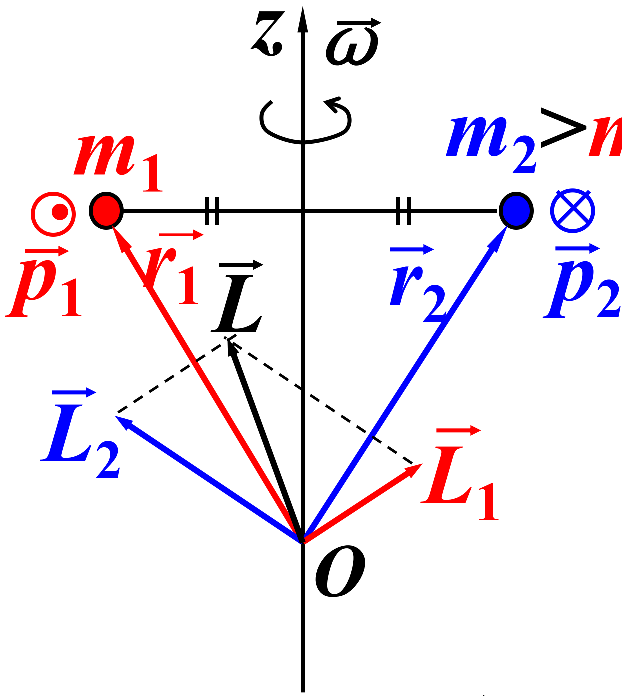
$$\boxed{J' = J + m_0 L^2}$$

进动



播放 暂停 复位 重复

刚体自转的角动量不一定都与自转轴平行。



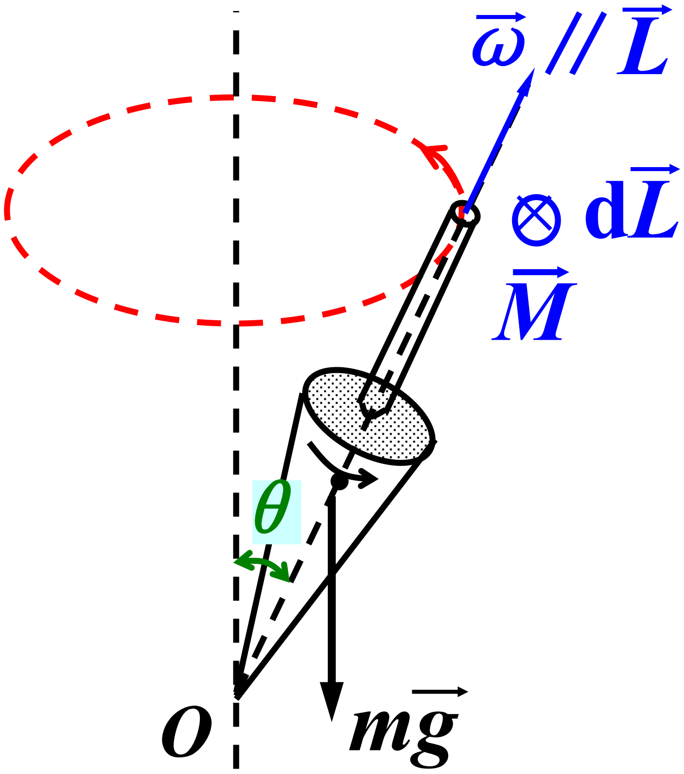
例如，图示的情形：质量对转轴不对称，则对轴上O点的$\vec{L}$不平行于$\vec{\omega}$。

若质量对转轴分布对称，

则： $\vec{L}\,//\,\vec{\omega}\,//$ 轴

$\vec{L}$（对点）$= L_z\vec{k}$（对轴）$= J_z\vec{\omega}$

下面我们就讨论这种质量对转轴分布对称的刚体的旋进问题。



玩具陀螺的旋进：

$$\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\longrightarrow$$

$$\mathrm{d}\vec{L}=\vec{M}\,\mathrm{d}t\,//\,\vec{M}\text{。}$$

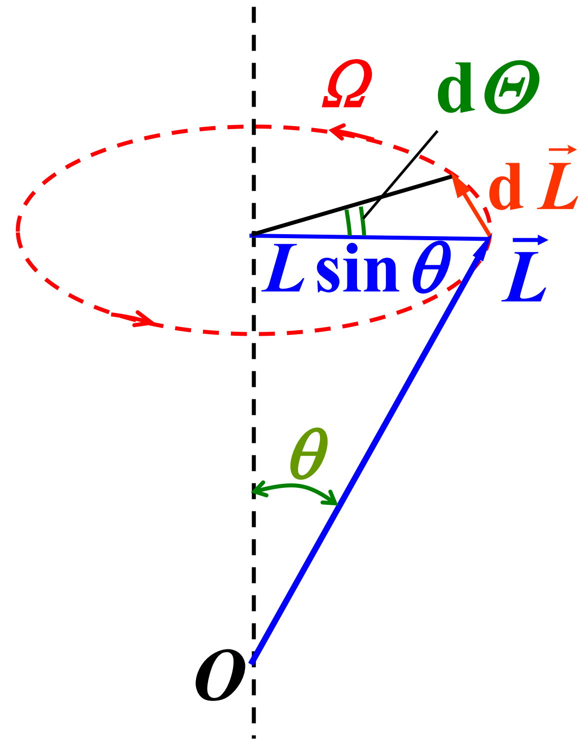
$$\vec{M}\perp\vec{L}\longrightarrow\mathrm{d}\vec{L}\perp\vec{L}$$

$\longrightarrow$ $\vec{L}$ 只改变方向而不改变大小，

从而产生旋进运动。

$$\left|\mathrm{d}\vec{L}\right| = L\sin\theta\,\mathrm{d}\Theta = M\,\mathrm{d}t$$

旋进角速度：$\Omega = \dfrac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t}$



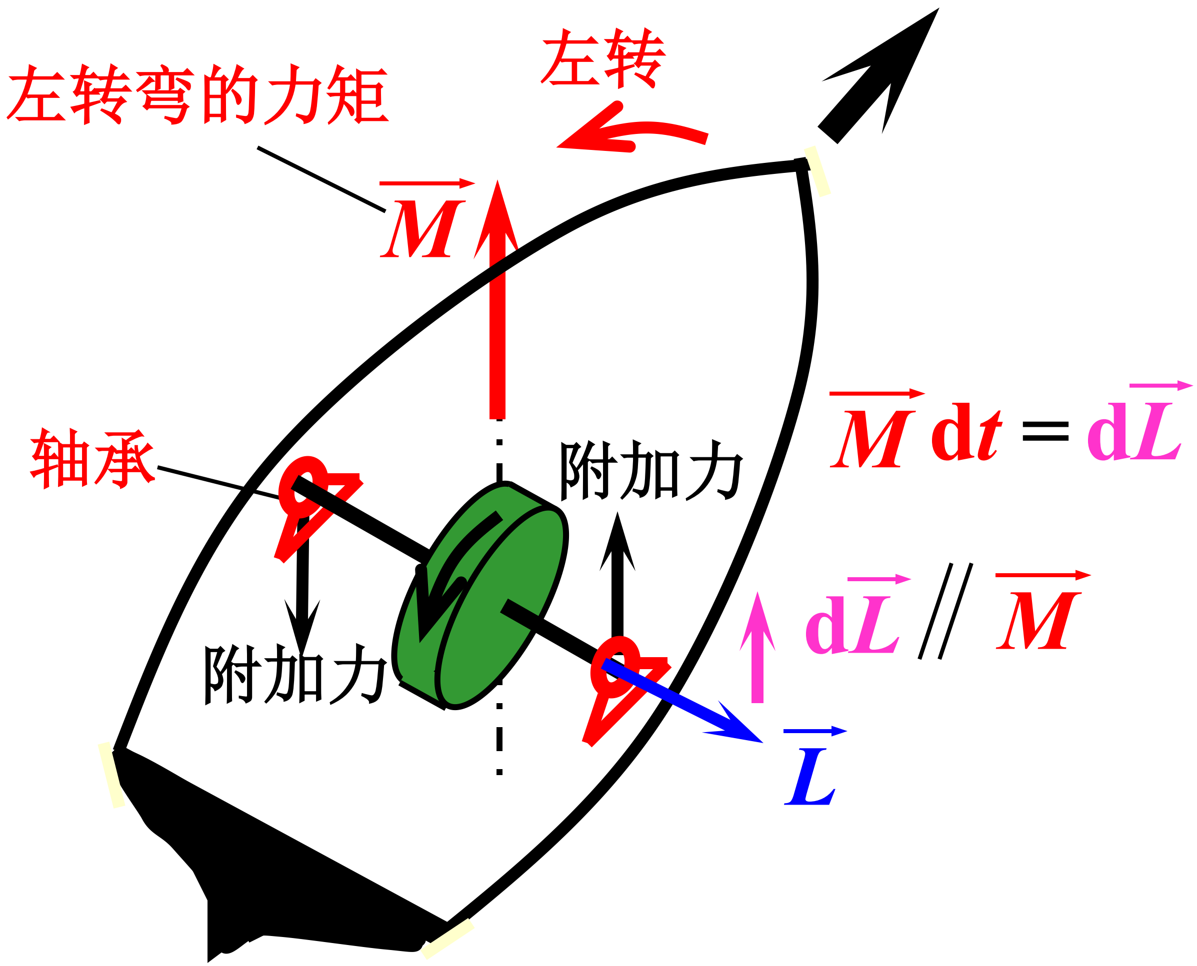
$$\therefore \quad \boxed{\Omega = \frac{M}{L\sin\theta} = \frac{M}{J\omega\sin\theta}}$$

$$\boxed{当\ \theta = 90^\circ\ 时，\ \Omega = \frac{M}{J\omega}}$$

$$\Omega \propto \frac{1}{\omega},\quad \omega\uparrow \rightarrow \Omega\downarrow$$

▲回转效应产生附加力矩：

- 轮船转弯时，涡轮机轴承要承受附加力。



附加力可能造成轴承的损坏，附加力矩也可能造成翻船事故。

- 三轮车拐弯时易翻车（内侧车轮上翘）。

当旋进发生后，总角速度 $\vec{\omega}_{总} = \vec{\omega} + \vec{\Omega} \neq \vec{\omega}$ 。

只有刚体高速自转时，才有 $\vec{\omega}_{总} \doteq \vec{\omega}$ ，

这时也才有 $\vec{L} \doteq J\vec{\omega}$ 和以上 Ω 的表示式。

当考虑到 $\vec{\Omega}$ 对 $\vec{\omega}_{总}$ 的贡献时，自转轴在旋进中还会出现微小的上下的周期性摆动，这种运动叫**章动（nutation）**。